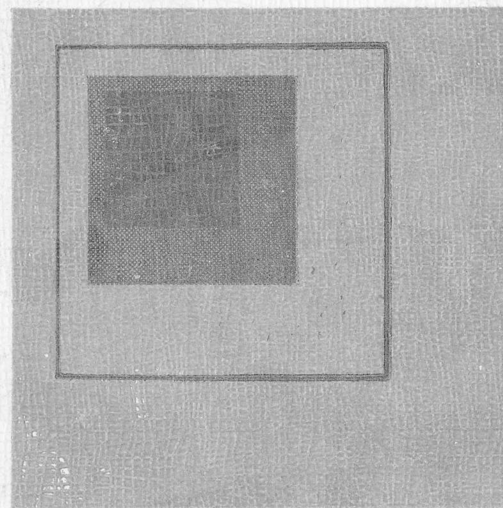
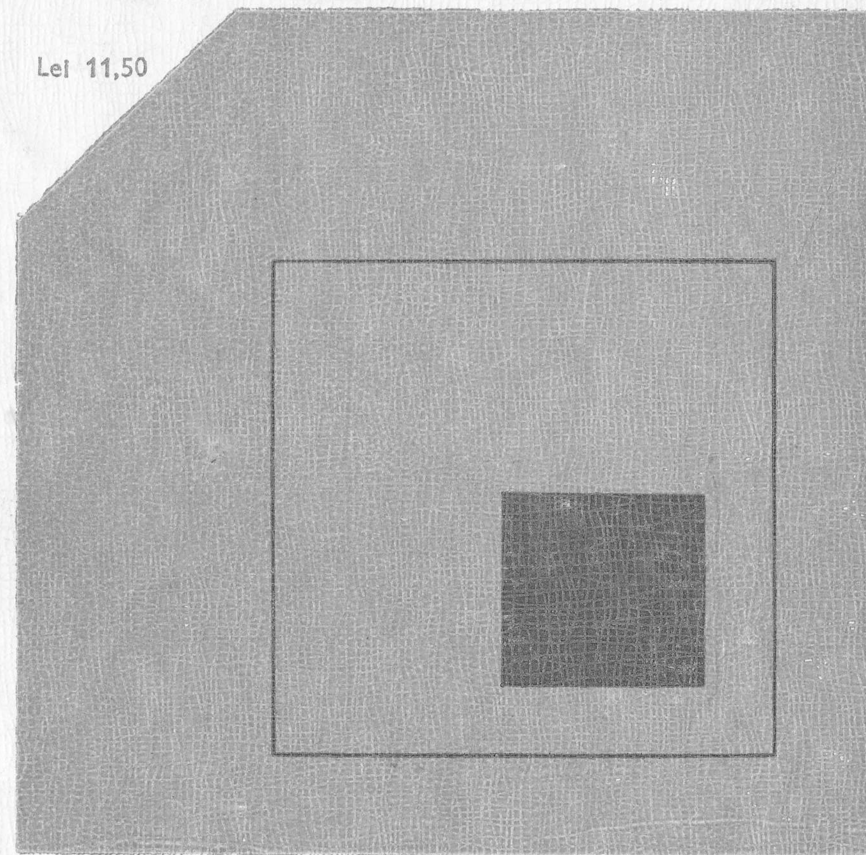
GH. VRĂNCEANU
N. MIHĂILEANU

INTRODUCERE ÎN TEORIA RELATIVITĂȚII



$E = mc^2$

Lei 11,50



Teoria relativității este teoria modernă a spațiului, a timpului și a gravitației. Deși conținutul lucrării este fizic, forma de expunere este matematică.

Lucrarea conține trei părți. Prima parte prezintă noțiunile și notațiile din teoria spațiilor generalizate, necesare înțelegerii teoriei relativității. Partea a doua tratează teoria relativității restrînse și teoria relativității generale. În partea a treia sînt redate cîteva capitole speciale referitoare la teoria relativității.

Cartea se adresează inginerilor, profesorilor de liceu, matematicienilor, fizicienilor, studenților și, în general, este accesibilă tuturor celor care cunosc noțiunile de bază ale unui curs de matematici generale.

EDITURA TEHNICĂ

VALENTINA CREȚU
ELENA GERU
ADRIANA NEGRU

01.12.1978. Coli de tipar 15
exemplare legate. C.Z. 530.12

c. 1767
Întreprinderea Poligrafică „Informația"
Str. Brezoianu Nr. 23—25
București

PREFAȚĂ

Teoria relativității este teoria modernă a spațiului, a timpului și a gravitației. Deși conținutul său este fizic, la baza descoperirii legilor naturii stînd în primul rînd observația și experiența, forma de expunere a cunoștințelor din acest domeniu se pretează unei strălucite tratări matematice, utilizînd mai ales cunoștințe din teoria spațiilor generalizate, ca o îmbinare la nivelul cel mai înalt între practică și teorie.

Teoria spațiilor generalizate, mai precis spus, geometria diferențială a spațiului cu n dimensiuni este obiect de studiu al unui curs dezvoltat al facultăților de matematici. Pentru ușurarea lecturii acestei cărți am considerat necesar să expunem, în prima parte a lucrării, noțiunile fundamentale ale acestei teorii, obișnuind, pe de o parte, lectorul cu notațiile utilizate, iar, pe de altă parte, făcînd accesibilă urmărirea textului doar cu cunoștințele unui curs de analiză generală din primul an al oricărui institut tehnic.

Partea a doua constă în expunerea teoriei relativității, așa cum este obișnuit în majoritatea cursurilor analoage, tratînd în prealabil teoria relativității restrînse și apoi a relativității generale.

Teoria actuală a relativității este foarte specializată. Cîteva capitole izolate sînt expuse în linii mari în partea a treia, cu o indicare bibliografică în vederea eventualei aprofundări.

Cartea este redactată de al doilea coautor, care a urmărit fidel metode și notațiile primului coautor Gh. Vrănceanu, care a adus contribuții științifice remarcabile, atît în geometria diferențială cît i în teoria relativității.

Noțiunile fundamentale de teoria relativității intră în cercul de cunoștințe care constituie cultura omului mediu. Este legitim ca un inginer sau un profesor de liceu, cu cunoștințe mai specializate, să dorească să aibă o informare mai bogată. Cartea de față caută să răspundă acestui deziderat.

GH. VRĂNCEANU, N. MIHĂILEANU

PARTEA ÎNTÎIA

GEOMETRIA DIFERENȚIALĂ A SPAȚIULUI CU n DIMENSIUNI

A. CALCUL TENSORIAL

1. Vectori. a) Unei mulțimi ordonate de n numere reale $(x^1, x^2, \ldots, x^n)$ îi atașăm un *punct* și reciproc. Mulțimea acestor puncte este un *spațiu cu n dimensiuni*, X_n.

Considerăm o transformare arbitrară

$$x'^i = x'^i(x^1, x^2, \ldots, x^n), \quad (i = 1, 2, \ldots, n) \tag{1}$$

al cărei determinant funcțional este nenul

$$\Lambda = \left| \frac{\partial x'^i}{\partial x^j} \right| \neq 0. \tag{2}$$

Față de transformarea (1), diferențialele coordonatelor se transformă astfel :

$$dx'^i = \frac{\partial x'^i}{\partial x^j} dx^j. \tag{3}$$

Facem convenția ca *de cîte ori un indice se repetă într-un monom să sumăm în raport cu acest indice.*

Prin analogie, o mulțime de mărimi $V^1, V^2, \ldots, V^n$, funcții reale de x^i sînt componentele *contravariante* ale unui *vector* V, dacă

printr-o transformare (1), aceste componente se reproduc ca şi diferenţialele coordonatelor, adică după legea

(4) $$V'^i = V^j \frac{\partial x'^i}{\partial x^j}.$$

b) Fie acum $f(x^1, x^2, \ldots, x^n)$ o funcţie în general; faţă de transformările (1), derivatele parţiale ale funcţiei f se transformă astfel:

(5) $$\frac{\partial f}{\partial x'^i} = \frac{\partial f}{\partial x^j} \frac{\partial x^j}{\partial x'^i}.$$

Prin analogie, o mulţime de mărimi $V_1, V_2, \ldots, V_n$ funcţii reale de x^i, sînt componentele *covariante* ale unui vector V, dacă printr-o transformare (1) aceste componente se reproduc ca şi derivatele parţiale ale unei funcţii arbitrare de coordonate, adică după legea

(6) $$V'_i = V_j \frac{\partial x^j}{\partial x'^i}.$$

Spunem că vectorul însuşi este contravariant sau covariant, după cum este privit ca mulţimea componentelor sale contravariante sau covariante.

c) Inversăm legea de transformare (4) a componentelor unui vector contravariant, înmulţind în ambele părţi ale relaţiei cu $\frac{\partial x^k}{\partial x'^i}$:

$$V'^i \frac{\partial x^k}{\partial x'^i} = V^j \frac{\partial x^k}{\partial x'^i} \frac{\partial x'^i}{\partial x^j}.$$

Sumăm acum în raport cu indicele i; în partea a doua avem derivata parţială a lui x^k în raport cu x^j, prin intermediul variabilelor noi $x'^1, x'^2, \ldots, x'^n$; avem

(7) $$\frac{\partial x^k}{\partial x'^i} \frac{\partial x'^i}{\partial x^j} = \delta^k_j,$$

unde δ^i_j este simbolul lui **Kronecker**

(8) $$\delta^i_j = \begin{cases} 1 \text{ cînd } i = j, \\ 0 \text{ cînd } i \neq j. \end{cases}$$

Atunci

$$V^j \frac{\partial x^k}{\partial x'^i} \frac{\partial x'^i}{\partial x^j} = V^j \delta^k_j.$$

Sumînd în raport cu j, trebuie să luăm $j = k$; pentru celelalte valori, partea a doua este nulă; deci

(9) $$V^k = V'^i \frac{\partial x^k}{\partial x'^i}.$$

Formal, ca regulă mnemotehnică, trecem de la formula (4) la (9), ducînd pe $\frac{\partial x'^i}{\partial x^k}$ în cealaltă parte a egalităţii sub formă inversată $\frac{\partial x^j}{\partial x'^i}$.

Analog, în formula (6), înmulţim în ambele părţi cu $\frac{\partial x'^i}{\partial x^k}$ şi sumăm apoi în raport cu i; avem

$$V'_i \frac{\partial x'^i}{\partial x^k} = V_j \frac{\partial x^j}{\partial x'^i} \frac{\partial x'^i}{\partial x^k} = V_j \frac{\partial x^j}{\partial x^k} = V_j \delta^j_k = V_k,$$

deci

(10) $$V_k = V'_i \frac{\partial x'^i}{\partial x^k},$$

cu aceeaşi regulă mnemotehnică, amintită mai sus.

Privind formulele (4) şi (9), observăm că pentru un vector contravariant, în factorul cu care multiplicăm, numărătorul este dat de prima parte a relaţiei: acelaşi accent şi acelaşi indice. Pentru un vector covariant, scriem legea de transformare (6) sau (10), observînd întîi că numitorul este dat de prima parte.

2. Definiţia tensorilor. a) Într-o transformare de coordonate

(1) $$x'^i = x'^i(x^1, x^2, \ldots, x^n), \quad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

vectorii contravarianţi V^i şi covarianţi V_i se transformă după legile

(2) $$V'^r = V^i \frac{\partial x'^r}{\partial x^i}, \qquad (3) \quad V'_r = V_i \frac{\partial x^i}{\partial x'^r};$$

iar inversele lor sînt

(2′) $$V^i = V'^r \frac{\partial x^i}{\partial x'^r}, \qquad (3') \quad V_i = V'_r \frac{\partial x'^r}{\partial x^i}.$$

Produsele de vectori se transformă după legile

(4) $$U'^r V'^s = U^i V^j \frac{\partial x'^r}{\partial x^i} \frac{\partial x'^s}{\partial x^j},$$

(4′) $$U^i V^j = U'^r V'^s \frac{\partial x^i}{\partial x'^r} \frac{\partial x^j}{\partial x'^s};$$

(5) $$U'_r V'_s = U_i V_j \frac{\partial x^i}{\partial x'^r} \frac{\partial x^j}{\partial x'^s},$$

(5′) $$U_i V_j = U'_r V'_s \frac{\partial x'^r}{\partial x^i} \frac{\partial x'^s}{\partial x^j};$$

(6) $$U'^r V'_s = U^i V_j \frac{\partial x'^r}{\partial x^i} \frac{\partial x^j}{\partial x'^s},$$

(6′) $$U^i V_j = U'^r V'_s \frac{\partial x^i}{\partial x'^r} \frac{\partial x'^s}{\partial x^j}.$$

Prin analogie, spunem că o mulţime de n^2 mărimi A^{ij}, funcţii reale de $x^1, x^2, \ldots, x^n$ $(i = 1, 2, \ldots, n;\ j = 1, 2, \ldots, n)$ sînt componentele contravariante ale unui *tensor* de ordinul al doilea, dacă la o transformare de coordonate (1) se transformă ca produsul a doi vectori contravarianţi, adică după legea

(7) $$A'^{rs} = A^{ij} \frac{\partial x'^r}{\partial x^i} \frac{\partial x'^s}{\partial x^j}.$$

Spunem, ca să simplificăm, că A^{ij} este un tensor contravariant de ordinul al doilea. Analog, A_{ij} sînt componentele unui tensor covariant de ordinul al doilea, dacă la o transformare de coordonate (1), se transformă ca produsul a doi vectori covarianţi, adică după legea

(8) $$A'_{rs} = A_{ij} \frac{\partial x^i}{\partial x'^r} \frac{\partial x^j}{\partial x'^s}.$$

De asemenea, A^i_j sînt componentele unui tensor mixt de ordinul al doilea, dacă la o transformare de coordonate (1) se transformă ca produsul unui vector contravariant cu unul covariant, adică după legea

(9) $$A'^r_s = A^i_j \frac{\partial x'^r}{\partial x^i} \frac{\partial x^j}{\partial x'^s}.$$

b) Putem să inversăm legile (7), (8) şi (9). Astfel să înmulţim ambele părţi ale relaţiei (7) cu $\frac{\partial x^h}{\partial x'^r} \frac{\partial x^k}{\partial x'^s}$ şi să sumăm apoi în raport cu r şi cu s; avem

$$A'^{rs} \frac{\partial x^h}{\partial x'^r} \frac{\partial x^k}{\partial x'^s} = A^{ij} \frac{\partial x^h}{\partial x'^r} \frac{\partial x'^r}{\partial x^i} \frac{\partial x^k}{\partial x'^s} \frac{\partial x'^s}{\partial x^j} =$$

$$= A^{ij} \frac{\partial x^h}{\partial x^i} \frac{\partial x^k}{\partial x^j} = A^{ij} \delta^h_i \delta^k_j = A^{hk};$$

sau, notînd i, j în loc de h şi de k,

(7′) $$A^{ij} = A'^{rs} \frac{\partial x^i}{\partial x'^r} \frac{\partial x^j}{\partial x'^s},$$

analog cu (4′). Obţinem în acelaşi mod,

(8′) $$A_{ij} = A'_{rs} \frac{\partial x'^r}{\partial x^i} \frac{\partial x'^s}{\partial x^j},$$

(9′) $$A^i_j = A'^r_s \frac{\partial x^i}{\partial x'^r} \frac{\partial x'^s}{\partial x^j}.$$

c) Pe aceeaşi cale, spunem că o mulţime de n^3 cantităţi A^{ij}_k, funcţii reale de coordonatele $x^1, x^2, \ldots, x^n$ iar $i, j, k = 1, 2, \ldots, n$, sînt componentele unui tensor de ordinul al treilea, o dată covariant

și de două ori contravariant, dacă într-o transformare de coordonate (1) aceste componente satisfac legii de transformare

$$(10)\qquad A'^{rs}_{t} = A^{ix}_{k}\frac{\partial x'^r}{\partial x^i}\frac{\partial x'^s}{\partial x^j}\frac{\partial x^k}{\partial x'^t}.$$

În general, pentru un tensor de ordinul $n = r + s$, avem prin definiție

$$(11)\qquad A'^{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_r}_{\beta_1\beta_2\ldots\beta_s} = A^{i_1 i_2\ldots i_r}_{j_1 j_2\ldots j_s}\frac{\partial x'^{\alpha_1}}{\partial x^{i_1}}\frac{\partial x'^{\alpha_2}}{\partial x^{i_2}}\cdots\frac{\partial x'^{\alpha_r}}{\partial x^{i_r}}\frac{\partial x^{j_1}}{\partial x'^{\beta_1}}\frac{\partial x^{j_2}}{\partial x'^{\beta_2}}\cdots\frac{\partial x^{j_s}}{\partial x'^{\beta_s}}.$$

Spunem că tensorul este contravariant de r ori și covariant de s ori, unde $r + s = n$.

3. Contracția tensorilor. a) Considerăm un vector contravariant U^i și unul covariant V_j care, conform definiției, la o transformare de coordonate

$$(1)\qquad x'^i = x'^i(x^1, x^2, \ldots, x^n), \quad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

se transformă după legile

$$U'^r = U^i\frac{\partial x'^r}{\partial x^i}, \quad V'_s = V_j\frac{\partial x^j}{\partial x'^s}.$$

Produsul lor $U'^r V'_s$ este un tensor mixt de ordinul al doilea. Presupunem $s = r$; atunci

$$(2)\qquad U'^r V'_r = U^i V_j\frac{\partial x'^r}{\partial x^i}\frac{\partial x^j}{\partial x'^r} = U^i V_j \delta^j_i = U^i V_i.$$

Deci *produsul scalar* $U^i V_i$ a doi vectori este un invariant. De asemenea produsele

$$(3)\qquad A_{ij}U^i V^j, \quad A^{ij}U_i V_j, \quad A^i_j U_i V^j, \quad A_{ij}B^{ij}, \quad A^i_j B^j_i$$

sînt invariante. De exemplu, să considerăm al treilea produs; avem

$$A'^r_s U'_r V'^s = A^i_j\frac{\partial x'^r}{\partial x^i}\frac{\partial x^j}{\partial x'^s}U_h\frac{\partial x^h}{\partial x'^r}V^k\frac{\partial x'^s}{\partial x^k} =$$

$$= A^i_j U_h V^k\left(\frac{\partial x^h}{\partial x'^r}\frac{\partial x'^r}{\partial x^i}\right)\left(\frac{\partial x^j}{\partial x'^s}\frac{\partial x'^s}{\partial x^k}\right) =$$

$$= A^i_j U_h V^k \delta^h_i\,\delta^j_k = A^i_j U_i V^j.$$

b) Invers, dacă unul din produsele (3) este invariant și cunoaștem natura a două sisteme de componente, rezultă natura sistemului rămas. De exemplu să presupunem că U_i, V_j sînt vectori covarianți arbitrari iar A^{ij} o mulțime de n^2 componente, astfel ca expresia $A^{ij}U_i V_j$, în care sumăm în raport cu i și în raport cu j, să fie un invariant. Atunci A^{ij} sînt componentele unui tensor contravariant. Într-adevăr, prin ipoteză avem

$$U'_r = U_i\frac{\partial x^i}{\partial x'^r}, \quad V'_s = V_j\frac{\partial x^j}{\partial x'^s}, \quad A'^{rs}U'_r V'_s = A^{ij}U_i V_j.$$

Atunci

$$A^{ij}U_i V_j = A'^{rs}U'_r V'_s = A'^{rs}U_i V_j\frac{\partial x^i}{\partial x'^r}\frac{\partial x^j}{\partial x'^s},$$

$$U_i V_j\left(A^{ij} - A'^{rs}\frac{\partial x^i}{\partial x'^r}\frac{\partial x^j}{\partial x'^s}\right) = 0;$$

ultima relație are loc oricare ar fi vectorii covarianți U_i, V_j; rezultă

$$A^{ij} = A'^{rs}\frac{\partial x^i}{\partial x'^r}\frac{\partial x^j}{\partial x'^s},$$

care este legea de transformare a tensorului contravariant.

c) Tensorul A^i_i este un invariant. În adevăr

$$A' = A'^r_r = A^i_j\frac{\partial x'^r}{\partial x^i}\frac{\partial x^j}{\partial x'^r} = A^i_j\delta^j_i = A^i_i = A$$

Spunem că A este obținut prin *contractare* din tensorul A^i_j.

Produsele considerate (2), (3) au caracter tensorial. Ele au fost contractate în raport cu indicii care se repetă. Mai general, dintr-un tensor de ordin superior putem să obținem pe aceeași cale *tensori contractați;* iterînd procedeul, putem să ajngem la un vector ori la un invariant.

De exemplu, A^{ij}_i este un vector, ceea ce justificăm simplu:

$$A'^{rs}_r = A^{ij}_k\frac{\partial x'^r}{\partial x^i}\frac{\partial x'^s}{\partial x^j}\frac{\partial x^k}{\partial x'^r} = A^{ij}_k\frac{\partial x'^s}{\partial x^j}\delta^k_i = A^{ij}_i\frac{\partial x'^s}{\partial x^j}.$$

De asemenea, dacă R^{ij}_{hk} este un tensor de ordinul al patrulea, R^{ij}_{il}, R^{ij}_{kj} sînt tensori de ordinul al doilea, iar R^{ij}_{ij} este o expresie invariantă, adică suma

$$R^{11}_{11} + R^{12}_{12} + \ldots + R^{1n}_{1n} + R^{21}_{21} + \ldots + R^{2n}_{2n} + \ldots + R^{nn}_{nn}$$

rămîne neschimbată prin transformarea (1).

4. Spaţiu euclidian n-dimensional. a) Considerăm transformarea

(1) $$x'^i = a^i_j x^j + a^i \quad (i,\ j = 1,\ 2, \ldots, n),$$

cu condiţiile

(2) $$a^i_j a^i_k = \delta_{jk} = \begin{cases} 1, & \text{dacă } j = k, \\ 0, & \text{dacă } j \neq k. \end{cases}$$

Această transformare invariază expresia

(3) $$d^2 = (x^1 - y^1)^2 + (x^2 - y^2)^2 + \ldots + (x^n - y^n)^2.$$

construită cu ajutorul coordonatelor a două puncte $P(x^i)$, $Q(y^i)$, În adevăr, avem prin transformarea (1)

$$y'^i = a^i_j y^j + a^i, \quad x'^i - y'^i = a^i_j(x^j - y^j),$$

deci

$$d'^2 = (x'^1 - y'^1)^2 + (x'^2 - y'^2)^2 + \ldots + (x'^n - y'^n)^2 =$$

$$= (x'^i - y'^i)(x'^i - y'^i) = a^i_j(x^j - y^j)\, a^i_k(x^k - y^k) =$$

$$= \delta_{jk}(x^j - y^j)(x^k - y^k) = (x^i - y^i)(x^i - y^i) = d^2.$$

Spunem că d este *distanţa* dintre punctele P şi Q şi că transformarea (1) este *ortogonală*, iar coordonatele x^i, în raport cu care distanţa are forma lui Pitagora (3), sînt *coordonate carteziene ortogonale.* Mulţimea proprietăţilor conservate de transformările ortogonale formează *geometria euclidiană* n-dimensională şi mulţimea punctelor considerate în această geometrie este *spaţiul euclidian* E_n.

b) După proprietăţile cunoscute din algebră, $|a^i_j| = 1$ şi inversa transformării (1) este de asemenea ortogonală

(4) $$x^i = a'^i_j x'^j + a'^i,$$

unde

(5) $$a'^i_j = a^j_i.$$

Faţă de transformările (1), un vector contravariant se transformă după legea

$$V'^r = V^i \frac{\partial x'^r}{\partial x^i} = V^i a^r_i$$

şi un vector covariant, după legea

$$V'_r = V_i \frac{\partial x^i}{\partial x'^r} = V_i a'^i_r = V_i a^r_i.$$

Avem deci aceeaşi lege de transformare a componenelor, adică într-un spaţiu euclidian avem un singur fel de vectori.

Într-un spaţiu E_n putem să introducem figurile şi noţiunile cunoscute din E_3, definindu-le prin ecuaţiile sau prin formulele lor analitice analoage.

5. Proprietăţi geometrice în X_n. a) Asociind unui punct $P(x^1, x^2, \ldots, x^n)$ din spaţiul general X_n, punctul de coordonate carteziene ortogonale $x^1, x^2, \ldots, x^n$ din spaţiul euclidian E_n, putem să introducem în X_n noţiuni şi figuri geometrice analoage celor euclidiene. În spaţiul X_n, numim *varietate*, mulţimea punctelor ale căror coordonate x^i satisfac sistemului de ecuaţii

(1) $$f^\alpha(x^1, x^2, \ldots, x^n) = 0, \quad (\alpha = 1,\ 2, \ldots, m \leqslant n).$$

Numărul $n - m$ este *dimensiunea* varietăţii. Dacă $\alpha = n - 1$, avem o *curbă,* dacă $\alpha = 1$, o *ipersuprafaţă.* Două varietăţi

(2) $$f^\alpha = 0, \quad g^\beta = 0 \quad (\alpha = 1,\ 2, \ldots, m;\ \beta = 1,\ 2, \ldots, p).$$

sînt *concurente,* dacă sistemul (2) este compatibil. Intersecţia varietăţilor de dimensiuni $n - m$ şi $n - p$ este cel puţin de dimensiune $n - (m + p)$; dacă $m + p = n$, varietăţile sînt *complementare.* Două

puncte sînt *vecine*, dacă coordonatele lor au valori apropiate; două varietăţi sînt vecine, dacă putem să stabilim între ele o corespondenţă de puncte vecine.

b) O varietate este *lineară*, dacă ecuaţiile (1) sînt lineare, adică de forma

(3) $$a_i^\alpha x^i + a^\alpha = 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, n; \ \alpha = 1, 2, \ldots, m \leqslant n).$$

Dacă $\alpha = n - 1$, avem o *dreaptă*; dacă $\alpha = 1$, avem un *iperplan*.

Introducem *coordonate omogene*

(4) $$x^i \to x^i : x^0,$$

x^0 fiind o nouă variabilă, de omogenizare.

Varietatea lineară $n - 1$ dimensională

(5) $$x^0 = 0$$

este numită *iperplan impropriu*. Intersecţia unei varietăţi cu iperplanul impropriu este o varietate improprie. Varietăţile lineare

(6) $$a_i^\alpha x^i + a^\alpha x^0 = 0, \quad b_i^\beta x^i + b^\beta x^0 = 0$$

$(\alpha = 1, 2, \ldots, m; \beta = 1, 2, \ldots, p)$ sînt *paralele*, dacă sistemul format de ecuaţiile (5) şi (6) este compatibil.

Numim *unghi* a două iperplane

(7) $$a_i x^i + \alpha = 0, \quad b_i x^i + \beta = 0,$$

numărul u, cuprins între 0 şi π, dat de formula

(8) $$\cos u = \frac{a_i b_i}{ab},$$

unde

(9) $$a^2 = a_i a_i = (a_1)^2 + (a_2)^2 + \ldots + (a_n)^2, \ b^2 = b_i b_i.$$

Iperplanele sînt *ortogonale*, dacă $\alpha = \frac{\pi}{2}$, adică

(10) $$a_i b_i = 0.$$

Numim *distanţă* dintre două puncte $P(x^i)$, $Q(y^i)$, numărul pozitiv d, dat de formula

(11) $$d^2 = (x^1 - y^1)^2 + (x^2 - y^2)^2 + \ldots + (x^n - y^n)^2.$$

c) O transformare *topologică* (biunivocă şi bicontinuă)

(12) $$x'^i = x'^i(x^1, x^2, \ldots, x^n)$$

conservă dimensiunea şi proprietatea de vecinătate a varietăţilor.

O transformare *proiectivă* (lineară în coordonatele omogene)

(13) $$x'^i = a_j^i x^j + a^i x^0, \quad x'^0 = a_j^0 x^j + a^0 x^0$$

transformă varietăţile lineare în varietăţi lineare.

O transformare *afină* (lineară în coordonatele neomogene)

(14) $$x'^i = a_j^i x^j + a^i$$

[dedusă din (13), cînd $a_j^0 = 0$], invariază iperplanul impropriu, transformă o varietate improprie într-o varietate improprie, conservă paralelismul.

d) Să determinăm transformările (14) care conservă unghiurile. După o transformare (14) un iperplan $\alpha_i x^i + \alpha = 0$ devine $\alpha'_i x'^i + \alpha' = 0$, $\alpha'_i(a_j^i x^j + a^i) + \alpha' = 0$, deci α_i sînt componentele unui tensor covariant $\alpha_j = \alpha'_i a_j^i$.

Expresia (8) este invariantă, dacă

(15) $$\alpha_j \beta_j = \rho \alpha'_i \beta'_i,$$

unde $\rho(x^1, x^2, \ldots, x^n)$ este un factor. Înţelegem că (15) are loc şi pentru $\alpha = \beta$. Dar condiţia $\alpha_j \beta_j = \alpha'_i \beta'_h a_j^i a_j^h = \rho \alpha'_i \beta'_i$ atrage

(16) $$a_j^i a_j^h = \rho \delta^{ih}.$$

Transformările (14) cu condiţiile (16) sînt numite *conforme*. Deci transformările conforme conservă unghiurile.

Dacă $\rho = 1$, transformările (14), (16) sînt ortogonale. Transformările ortogonale conservă distanţele şi stau la baza geometriei euclidiene. Analog celelalte transformări considerate generează geometria conformă, afină, proiectivă, respectiv, topologia spaţiului X_n.

6. Aplicaţii. a) *Dacă A_i sînt componentele unui vector covariant şi B^{jk} componentele unui tensor contravariant, produsul A_iB^{ij} este un vector contravariant.*

Folosim formulele de transformare

$$A'_r = A_i \frac{\partial x^i}{\partial x'^r}, \quad B'^{rs} = B^{jk}\frac{\partial x'^r}{\partial x^j}\frac{\partial x'^s}{\partial x^k}.$$

Avem

$$A'_rB'^{rs} = A_iB^{jk}\frac{\partial x^i}{\partial x'^r}\frac{\partial x'^r}{\partial x^j}\frac{\partial x'^s}{\partial x^k} = A_iB^{jk}\delta^i_j\frac{\partial x'^s}{\partial x^k} = A_iB^{ik}\frac{\partial x'^s}{\partial x^k},$$

adică legea de transformare a unui vector contravariant.

b) *Dacă A^i_j, B^r_s sînt tensori, produsul $A^i_jB^j_i$ este un invariant.*

Folosim formula de transformare a tensorului mixt

$$A'^r_s = A^i_j \frac{\partial x'^r}{\partial x^i}\frac{\partial x^j}{\partial x'^s}.$$

Avem

$$A'^r_sB'^s_r = A^i_jB^h_k \frac{\partial x'^r}{\partial x^i}\frac{\partial x^j}{\partial x'^s}\frac{\partial x'^s}{\partial x^h}\frac{\partial x^k}{\partial x'^r} =$$

$$= A^i_jB^h_k\frac{\partial x^k}{\partial x'^r}\frac{\partial x'^r}{\partial x^i}\frac{\partial x^j}{\partial x'^s}\frac{\partial x'^s}{\partial x^h} = A^i_jB^h_k\delta^k_i\delta^j_h = A^k_jB^j_k,$$

ceea ce trebuia dovedit.

c) *Dacă A^{ij} este un tensor covariant arbitrar şi B_{hk} un sistem de n^2 cantităţi pentru care, la o transformare generală ade variabile, produsul $A^{ij}B_{ij}$ este invariant, atunci B_{rs} sînt componentele unui tensor covariant.*

Din ipoteză,

$$A'^{rs}B'_{rs} = A^{ij}B_{ij}, \quad A'^{rs} = A^{ij}\frac{\partial x'^r}{\partial x^i}\frac{\partial x'^s}{\partial x^j}.$$

Atunci

$$A^{ij}\left(B'_{rs}\frac{\partial x'^r}{\partial x^i}\frac{\partial x'^s}{\partial x^j} - B_{ij}\right) = 0.$$

Aceste relaţii trebuie să aibă loc oricare ar fi tensorul A^{ij}; atunci

$$B_{ij} = B'_{rs}\frac{\partial x'^r}{\partial x^i}\frac{\partial x'^s}{\partial x^j},$$

legea de transformare a tensorului covariant.

d) *Dacă A_{ij} sînt componentele unui tensor covariant arbitrar, B_k ale unui vector covariant arbitrar iar C^h un sistem de mărimi pentru care, la o transformare de variabile să avem $A_{ij}C^i = B_j$, atunci C^i sînt componentele unui vector contravariant.*

Din ipoteză

$$A'_{rs} = A_{ij}\frac{\partial x^i}{\partial x'^r}\frac{\partial x^j}{\partial x'^s}, \quad B'_t = B_h\frac{\partial x^h}{\partial x'^t}, \quad A'_{rs}C'^r = B'_s.$$

Atunci

$$A'_{rs}C'^r = A_{ij}C'^r\frac{\partial x^i}{\partial x'^r}\frac{\partial x^j}{\partial x'^s} = B'_s = B_j\frac{\partial x^j}{\partial x'^s} = A_{ij}C^i\frac{\partial x^j}{\partial x'^s},$$

$$A_{ij}\frac{\partial x^j}{\partial x'^s}\left(C'^r\frac{\partial x^i}{\partial x'^r} - C^i\right) = 0.$$

Relaţiile trebuie să aibă loc oricare ar fi tensorul A_{ij}; deci

$$\frac{\partial x^j}{\partial x'^s}\left(C'^r\frac{\partial x^i}{\partial x'^r} - C^i\right) = 0.$$

Considerăm parantezele ca necunoscute X^i; deoarece determinantul coeficienţilor $\left|\frac{\partial x^j}{\partial x'^s}\right| \neq 0$, sistemul omogen în X^i trebuie să aibă numai soluţia banală,

$$C^i = C'^r\frac{\partial x^i}{\partial x'^r},$$

deci C^i este vector contravariant.

B. SPAŢIU CU CONEXIUNE AFINĂ

1. Definiţie. Coeficienţii conexiunii. a) În spaţiul X_n, notăm prin $x^1, x^2, \ldots, x^n$ coordonatele unui punct arbitrar P şi considerăm o transformare de coordonate

(1) $$x'^i = x'^i(x^1, x^2, \ldots, x^n).$$

Diferenţialele coordonatelor se schimbă atunci după formula

(2) $$dx'^i = \left(\frac{\partial x'^i}{\partial x^j}\right)_P dx^j,$$

sau

(3) $$X'^i = p^i_j X^j,$$

notînd $dx^i = X^i$ şi prin p^i_j derivatele parţiale calculate în P, deci constante, dacă transformarea (1) este dată iar P rămîne fix; variabilă este numai direcţia de-a lungul căreia diferenţiem.

Relaţia (3) reprezintă astfel o centroafinitate de centru P. Cu ajutorul diferenţialelor X^i putem să ataşăm, prin urmare, unui punct P un spaţiu euclidian E_P, în care o transformare (1) induce o centroafinitate.

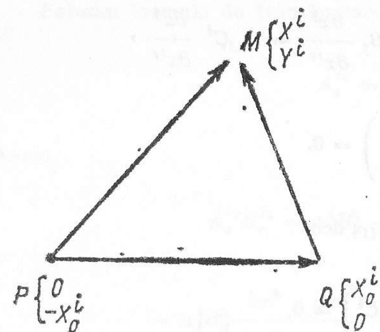


Fig. 1

Fiind dat un alt punct Q al spaţiului X_n, avem un alt spaţiu euclidian E_Q ataşat acestui punct. Dacă spaţiul X_n este oarecare, nu avem nici o legătură între spaţiile E_P, E_Q. Spunem că spaţiul X_n este *cu conexiune afină* în punctul P, dacă putem să stabilim o corespondenţă afină între spaţiile E_P, E_Q, oricare ar fi Q, vecin de P. Dacă această proprietate are loc în toate punctele P din X spunem că spaţiul întreg este cu conexiune afină şi îl notăm A

b) Fie X^i coordonatele atribuite spaţiului euclidian E_P, de centru P, iar Y^i coordonatele relativ la punctul Q (fig. 1). Realizăm o corespondenţă afină între spaţiile E_P şi E_Q prin formule de forma

(4) $$Y^i = a^i_j X^j + a^i,$$

a^i_j şi a^i fiind coeficienţi ce depind de punctul Q, deoarece P este fixat.

Notăm prin X^i_0 coordonatele lui Q, raportate la sistemul P. Invers, coordonatele lui P în raport cu Q vor fi $-X^i_0$. Presupunem că punctul Q este vecin lui P, deci X^i_0 sînt cantităţi infinitezimale.

Putem să determinăm uşor coeficienţii a^i, deoarece relaţiile (4) trebuie să fie satisfăcute cînd $M \to P$, adică $X^i \to 0$, $Y^i \to -X^i_0$, deci $a^i = -X^i_0$, cu aproximarea infiniţilor mici de primul ordin.

Coordonatele X^i_0 fiind infinitezimale, putem să dezvoltăm orice mărime α, depinzînd de poziţia punctului Q, în serie, după puterile lui X^i_0, sub forma

$$\alpha = \Gamma + \Gamma_i X^i_0 + \Gamma_{ij} X^i_0 X^j_0 + \Gamma_{ijk} X^i_0 X^j_0 X^k_0 + \ldots,$$

Γ fiind coeficienţi, care nu depind de Q (ci de P, care a fost fixat). Neglijăm infiniţii mici de ordin superior primului; deci

(5) $$\alpha = \Gamma + \Gamma_i X^i_0.$$

Punînd pe a^i_j sub forma (5), formulele (4) devin

$$Y^i = -X^i_0 + (\Gamma^i_j + \Gamma^i_{jk} X^k_0) X^j.$$

Aplicăm această formulă punctului Q; obţinem

$$0 = -X^i_0 + (\Gamma^i_j + \Gamma^i_{jk} X^k_0) X^j_0,$$

relaţie care trebuie să fie verificată, oricare ar fi X^i_0: anulăm termenii de ordinul întîi (nu şi pe cei de ordinul al doilea, deoarece aceştia nu au fost scrişi toţi); avem $\Gamma^i_j = \delta^i_j$. Obţinem atunci formula

(6) $$Y^i = X^i - X^i_0 + \Gamma^i_{jk} X^j X^k_0,$$

oprindu-ne la termeni infinitezimali de primul ordin.

c) Cele n^3 cantităţi Γ^i_{jk} (pe care nu putem să le mai identificăm prin consideraţiile noastre) rămîn arbitrare; Γ^i_{jk} depind de punctul P şi le numim *coeficienţi de conexiune* ai spaţiului A_n în punctul P. Spaţiul cu conexiune afină A_n este dat, cînd sînt cunoscute expresiile $\Gamma^i_{jk}(x^1, x^2, \ldots, x^n)$, funcţii de punctul arbitrar, P. Formulele (6) definesc o schimbare de coordonate a spaţiului A_n, cînd trecem de la punctul P la punctul vecin Q. Dacă Γ^i_{jk} sînt toate nule, (6) se reduce la o translaţie iar spaţiul este euclidian.

2. Formulele de transformare ale coeficienţilor conexiunii afine. a) Într-un spaţiu A_n cu conexiune afină, avem o corespondenţă afină între spaţiile E_P, E_Q ataşate la două puncte vecine P, Q, de forma

(1) $$Y^i = X^i - X^i_0 + \Gamma^i_{jk} X^j X^k_0,$$

unde X^i, Y^i sînt coordonate în E_P, E_Q, X^i_0 sînt componentele vectorului PQ iar Γ^i_{jk} coeficienţii de conexiune, calculaţi în P.

Efectuăm o transformare de variabile

(4) $$x'^i = x'^i(x^1, x^2, \ldots, x^n)$$

şi notăm cu accente noile valori ; avem, analog cu (1),

(3) $$Y'^i = X'^i - X'^i_0 + \Gamma'^i_{jk} X'^j X'^k_0 ;$$

dar

$$X'^i = \mathrm{d}x'^i = \left(\frac{\partial x'^i}{\partial x^j}\right)_P X^j, \quad Y'^i = \left(\frac{\partial x'^i}{\partial x^j}\right)_Q Y^j.$$

Deoarece Q este vecin cu P, dezvoltăm în serie după X^i_0, oprind termenii infinitezimali de primul ordin ; pentru o funcţie oarecare avem

$$f(Q) = f(P) + \left(\frac{\partial f}{\partial x^k}\right)_P X^k_0 ;$$

deci

(5) $$\left(\frac{\partial x'^i}{\partial x^j}\right)_Q = \left(\frac{\partial x'^i}{\partial x^j}\right)_P + \left(\frac{\partial^2 x'^i}{\partial x^j \partial x^k}\right)_P X^k_0 .$$

b) Avem atunci din (3)—(5), suprimînd indicele P, deoarece calculăm toate derivatele parţiale numai în P,

$$X'^i - X'^i_0 + \Gamma'^i_{jk} X'^j X'^k_0 = Y'^j =$$

$$= \left(\frac{\partial x'^i}{\partial x^j}\right)_Q Y^j = \left(\frac{\partial x'^i}{\partial x^j} + \frac{\partial^2 x'^i}{\partial x^j \partial x^k} X^k_0\right)(X^j - X^j_0 + \Gamma^j_{lk} X^l X^k_0).$$

Termenii în $X'^i - X'^i_0$ şi $X^j - X^j_0$ sînt egali, din cauza primelor formule (4). Identificăm restul termenilor infinitezimali de primul ordin :

$$\Gamma'^i_{rs} X'^r X'^s_0 = \frac{\partial^2 x'^i}{\partial x^j \partial x^k} X^k_0 X^j + \frac{\partial x'^i}{\partial x^j} \Gamma^j_{lk} X^l X^k_0 .$$

În ultimul termen schimbăm notaţiile indicilor de sumare : l cu j, j cu r şi ţinem seama de (4). Avem

$$\Gamma'^i_{rs} \frac{\partial x'^r}{\partial x^j} X^j \frac{\partial x'^s}{\partial x^k} X^k_0 = \left(\frac{\partial^2 x'^i}{\partial x^j \partial x^k} + \Gamma^r_{jk} \frac{\partial x'^i}{\partial x^r}\right) X^j X^r_0,$$

de unde

(6) $$\frac{\partial^2 x'^i}{\partial x^j \partial x^k} = \Gamma'^i_{rs} \frac{\partial x'^r}{\partial x^j} \frac{\partial x'^s}{\partial x^k} - \Gamma^r_{jk} \frac{\partial x'^i}{\partial x^r}$$

Aceasta este legea după care se transformă coeficienţii unei conexiuni afine, la o schimbare de variabile.

3. Derivata covariantă a unui vector. a) Fie V^i nu vector contravariant. Într-o schimbare de coordonate, avem

(1) $$V'^i = V^j \frac{\partial x'^i}{\partial x^j} ;$$

diferenţiem

(2) $$\mathrm{d}V'^i = \mathrm{d}V^j \frac{\partial x'^i}{\partial x^j} + V^j \frac{\partial^2 x'^i}{\partial x^j \partial x^k} \mathrm{d}x^k ;$$

deci diferenţialele vectorilor nu au caracter tensorial. Eliminăm derivatele de ordinul al doilea prin formulele

(3) $$\frac{\partial^2 x'^i}{\partial x^j \partial x^k} = \Gamma'^i_{rs} \frac{\partial x'^r}{\partial x^j} \frac{\partial x'^s}{\partial x^k} - \Gamma^r_{jk} \frac{\partial x'^i}{\partial x^r} ,$$

după care se transformă coeficienţii conexiunii afine. Avem

$$\mathrm{d}V'^i = \mathrm{d}V^j \frac{\partial x'^i}{\partial x^j} + \Gamma'^i_{rs}\left(V^j \frac{\partial x'^r}{\partial x^j}\right)\left(\frac{\partial x'^s}{\partial x^k} \mathrm{d}x^k\right) - \Gamma^r_{jk} \frac{\partial x'^i}{\partial x^r} V^j \mathrm{d}x^k,$$

dar

$$V^j \frac{\partial x'^r}{\partial x^j} = V'^r, \quad \frac{\partial x'^s}{\partial x^k} \mathrm{d}x^k = \mathrm{d}x'^s;$$

deci

$$\mathrm{d}V'^i - \Gamma'^i_{rs} V'^r \mathrm{d}x'^s = (\mathrm{d}V^r - \Gamma^r_{jk} V^j \mathrm{d}x^k) \frac{\partial x'^i}{\partial x^r}.$$

Prin urmare, expresiile

(4) $$\mathrm{D}V^i = \mathrm{d}V^i - \Gamma^i_{jk} V^j \mathrm{d}x^k$$

sînt componentele unui vector contravariant. Spunem că $\mathrm{D}V^i$ sînt *diferențialele absolute* ale componentelor vectorului V^i sau, mai scurt, că $\mathrm{D}V^i$ este diferențiala absolută a vectorului V^i, iar

(5) $$V^i_{,k} = \frac{\partial V^i}{\partial x^k} - \Gamma^i_{jk} V^j$$

este *derivata covariantă* a vectorului V^j.

b) În mod analog, plecăm de la un vector covariant V_i:

(6) $$V_j = V'_i \frac{\partial x'^i}{\partial x^j};$$

avem prin diferențiere

$$\mathrm{d}V_j = \mathrm{d}V'_i \frac{\partial x'^i}{\partial x^j} + V'_i \frac{\partial^2 x'^i}{\partial x^j \partial x^k} \mathrm{d}x^k.$$

Eliminăm de asemenea derivatele de ordinul al doilea din (3):

$$\mathrm{d}V_j = \mathrm{d}V'_i \frac{\partial x'^i}{\partial x^j} + V'_i \left(\Gamma'^i_{rs} \frac{\partial x'^r}{\partial x^j} \frac{\partial x'^s}{\partial x^k} - \Gamma^r_{jk} \frac{\partial x'^i}{\partial x^r} \right) \mathrm{d}x^k,$$

$$\mathrm{d}V_j = \mathrm{d}V'_i \frac{\partial x'^i}{\partial x^j} + \Gamma'^i_{rs} V'_i \frac{\partial x'^r}{\partial x^j} \mathrm{d}x'^s - \Gamma^r_{jk} V_r \mathrm{d}x^k;$$

sau

$$\mathrm{d}V_j + \Gamma^r_{jk} V_r \mathrm{d}x^k = (\mathrm{d}V'_r + \Gamma'^i_{rs} V'_i \mathrm{d}x'^s) \frac{\partial x'^r}{\partial x^j}.$$

Deci expresiile

(7) $$\mathrm{D}V_i = \mathrm{d}V_i + \Gamma^j_{ik} V_j \mathrm{d}x^k$$

sînt componentele unui vector covariant. Spunem că $\mathrm{D}V_i$ este diferențiala absolută a vectorului covariant V_i, iar

(8) $$V_{i;k} = \frac{\partial V_i}{\partial x^k} + \Gamma^j_{ik} V_j$$

este derivata lui covariantă.

4. Diferențiala absolută a unui tensor. Diferențiala absolută a unui vector contravariant V^i sau covariant V_i este dată de

(1) $$\mathrm{D}V^i = \mathrm{d}V^i - \Gamma^i_{jk} V^j \mathrm{d}x^k, \quad \mathrm{D}V_i = \mathrm{d}V_i + \Gamma^j_{ik} V_j \mathrm{d}x^k,$$

expresii care au caracter tensorial. Putem să extindem procedeul pentru orice tensor.

Fie, de exemplu, tensorul A^{ij}_k. Atunci forma

(2) $$\varphi = A^{ij}_k U_i V_j W^k$$

este invariantă, U, V, W sînt vectori, a căror natură este indicată de poziția indicilor. Avem prin diferențiere

$$\mathrm{d}\varphi = \mathrm{d}A^{ij}_k U_i V_j W^k + A^{ij}_k (\mathrm{d}U_i V_j W^k + U_i \mathrm{d}V_j W^k + U_i V_j \mathrm{d}W^k)$$

și conform formulelor (1)

$$\mathrm{d}\varphi = \mathrm{d}A^{ij}_k U_i V_j W^k + A^{ij}_k V_i W^k (\mathrm{D}U_i - \Gamma^\alpha_{i\beta} U_\alpha \mathrm{d}x^\beta) +$$
$$+ A^{ij}_k U_i W^k (\mathrm{D}V_j - \Gamma^\alpha_{j\beta} V_\alpha \mathrm{d}x^\beta) +$$
$$+ A^{ij}_k U_i V_j (\mathrm{D}W^k + \Gamma^k_{\alpha\beta} W^\alpha \mathrm{d}x^\beta)$$

sau

(3) $$\mathrm{d}\varphi = \mathrm{D}A^{ij}_k U_i V_j W^k + A^{ij}_k \mathrm{D}U_i V_j W_k +$$
$$+ A^{ij}_k U_i \mathrm{D}V_j W^k + A^{ij}_k U_i V_j \mathrm{D}W^k,$$

unde am pus

(4) $$\mathrm{D}A^{ij}_k = \mathrm{d}A^{ij}_k + (\Gamma^\alpha_{k\beta} A^{ij}_\alpha - \Gamma^i_{\alpha\beta} A^{\alpha j}_k - \Gamma^j_{\alpha\beta} A^{i\alpha}_k) \mathrm{d}x^\beta;$$

$d\varphi$ este o expresie invariantă iar U_i, V_j, W^k, DU_i, DV_j, DW^k sînt vectori; deci şi primul termen din expresia finală (3) a lui $d\varphi$ este un invariant, oricare ar fi U_i, V_j, W^k, adică DA_k^{ij} este un tensor de ordinul al treilea, pe care îl numim *diferenţiala absolută* a tensorului A_k^{ij}. În mod corespunzător, derivata lui covariantă este

(5) $$A_{k,l}^{ij} = \frac{\partial A_k^{ij}}{\partial x^l} + A_\alpha^{ij}\Gamma_{kl}^\alpha - A_k^{\alpha j}\Gamma_{\alpha l}^i - A_k^{i\alpha}\Gamma_{\alpha l}^r$$

După aceeaşi regulă putem să obţinem diferenţiala absolută sau derivata covariantă a oricărui tensor.

5. Paralelism. Curbe autoparalele. a) Spunem că vectorul V^i a fost transportat prin *paralelism* din punctul P în punctul vecin Q, dacă diferenţiala lui absolută este nulă:

(1) $$DV^i = dV^i - \Gamma_{jk}^i V^j dx^k = 0,$$

dx^k fiind părţile principale ale componentelor deplasării infinitezimale PQ. Dacă spaţiul este euclidian, raportat la coordonate carteziene, $\Gamma_{jk}^i = 0$ în toate punctele, diferenţiala absolută coincide cu diferenţiala obişnuită, deci V^i rămîne constant, ceea ce corespunde paralelismului euclidian. Deci prin paralelism,

(2) $$dV^i = \Gamma_{jk}^i V^j dx^k.$$

b) Dacă presupunem coordonatele x^i funcţii de un parametru t:

(3) $$x^i = x^i(t),$$

punctul P descrie o curbă c. Fie V^i un vector contravariant ataşat lui P. Cînd punctul P descrie curba c, vectorul mobil

(4) $$\frac{dV^i}{dt} - \Gamma_{jk}^i V^j \frac{dx^k}{dt}$$

este numit *vectorul derivat* al lui V^i de-a lungul curbei c.

Vectorul $V^i(t)$ aplicat punctului P, care corespunde parametrului t pe curba c (fig. 2) se transportă deci prin paralelism în punctul vecin Q, corespunzător valorii $t + \Delta t$ a parametrului, dacă pentru vectorul

$$V'^i = V^i(t + \Delta t) = V^i(t) + \Delta V^i(t),$$

aplicat în Q, este îndeplinită condiţia

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta V^i}{\Delta t} = \frac{dV^i}{dt} = \Gamma_{jk}^i \frac{dx^k}{dt}.$$

c) Spunem că o curbă este *autoparalelă*, dacă vectorul ei tangent se transportă prin paralelism. Luînd în formula (4), ca vector V^i, vectorul tangent, de componente $\frac{dx^i}{dt}$, trebuie să avem relaţiile

(5) $$\frac{d^2x^i}{dt^2} = \Gamma_{jk}^i \frac{dx^j}{dt}\frac{dx^k}{dt}.$$

Spaţiul A_n fiind dat, deci Γ_{jk}^i fiind cunoscute în fiecare punct al spaţiului, (5) sînt ecuaţiile diferenţiale ale curbelor autoparalele. În cazul spaţiului euclidian, raportat la coordonate carteziene,

$$\Gamma_{jk}^i = 0, \quad \frac{d^2x^i}{dt^2} = 0, \quad x^i = a^i t + b^i,$$

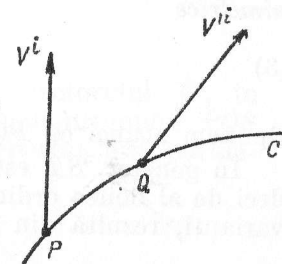


Fig. 2

deci curbele autoparalele ale spaţiului euclidian sînt dreptele spaţiului.

6. Torsiune în A_n. Fie dat punctul $P(x^i)$ şi punctul vecin $Q(x^i + dx^i)$, dx^i fiind părţile principale ale componentelor deplasării infinitezimale PQ; fie $R(x^i + \delta x^i)$ un alt punct vecin lui P, notînd prin δx^i părţile principale ale deplasării PR (fig. 3). Transportăm prin paralelism vectorul PR de-a lungul lui PQ în QS şi vectorul PQ de-a lungul lui PR în RT; obţinem

$$S[x^i + dx^i + \delta(x^i + dx^i)],$$
$$T[x^i + \delta x^i + d(x^i + \delta x^i)].$$

Din formula de paralelism

(1) $$dV^i = \Gamma_{jk}^i V^j dx^k,$$

punînd $V^i = \delta x^i$, componentele vectorului PR, avem

$$d\delta x^i = \Gamma_{jk}^i \delta x^j dx^k$$

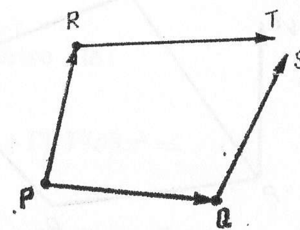


Fig. 3

şi analog,

$$\delta\, dx^i = \Gamma^i_{jk} dx^j \delta x^k = \Gamma^i_{kj} \delta x^j\, dx^k.$$

Componentele vectorului ST sînt deci

(2) $$\Delta x^i = d\delta x^i - \delta\, dx^i = (\Gamma^i_{jk} - \Gamma^i_{kj})\delta x^j\, dx^k.$$

În cazul spaţiului euclidian, $\Gamma^i_{jk} = 0$, $\Delta x^i = 0$, deci punctele S şi T coincid. Această proprietate are loc şi în cazul unei *conexiuni simetrice*

(3) $$\Gamma^i_{jk} = \Gamma^i_{kj}.$$

Spunem atunci că $PQRS$ este un paralelogram infinitezimal.

În general, ST este un infinit mic de acelaşi ordin cu $\delta x^i\, dx^k$, deci de al doilea ordin. Deoarece Δx^i, δx^i, dx^k sînt vectori contravarianţi, rezultă din (2), că

(4) $$T^i_{jk} = \Gamma^i_{jk} - \Gamma^i_{kj}$$

sînt componentele unui tensor de ordinul al treilea. Spunem că T^i_{jk} este tensorul de *torsiune* al spaţiului A_n.

7. Curbură în A_n. a) Fie $P(x^i)$ un punct al spaţiului A_n iar Q şi R puncte vecine, vectorii PQ şi PR avînd componentele dx^i, respectiv δx^i (fig. 4). Transportăm prin paralelism vectorul PR în QS de-a lungul lui PQ şi vectorul PQ în RT de-a lungul lui PR.

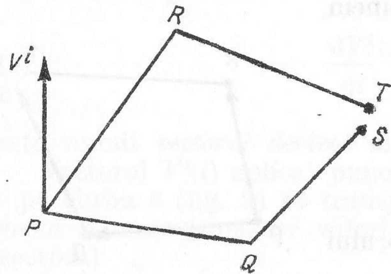


Fig. 4

Presupunem că V^i este un vector contravariant aplicat în punctul P şi să-l transportăm prin paralelism de-a lungul pentagonului infinitezimal $PQSTRP$, sau, ceea ce este acelaşi lucru, să-l deplasăm pînă în S, pe de o parte pe drumul PQS, pe de altă parte, pe drumul $PRTS$. În punctul Q, vectorul V^i devine $V^i + dV^i$, iar în S,

(1) $$V^i + dV^i + \delta(V^i + V^i) = \\ = V^i + dV^i \delta V^i + \delta\, dV^i.$$

În punctul R, vectorul V^i devine $V^i + \delta V^i$, iar în T,

(2) $$V^i + \delta V^i + d(V^i + \delta V^i) = V^i + dV^i + \delta V^i + d\delta V^i.$$

Notăm cu ΔV^i variaţiile componentelor vectorului V^i, de-a lungul drumului TS; deoarece

(3) $$\Delta x^i = \delta d x^i - d\delta x^i$$

sînt componentele deplasării TS, atunci în transportul prin paralelism al vectorului V^i de-a lungul acestui drum

(4) $$\Delta V^i = \Gamma^i_{jk} V^j \Delta x^k.$$

b) Diferenţa dintre valorile componentelor vectorului V^i, în punctul S, transportat prin paralelism de-a lungul drumului PQS şi valorile componentelor aceluiaşi vector, transportat prin paralelism de-a lungul drumului $PRTS$ este deci

(5) $$\mathscr{D}V^i = \delta d V^i - d\delta V^i - \Delta V^i.$$

Dar în transportul prin paralelism,

(6) $$dV^i = \Gamma^i_{jk} V^j\, dx^k, \quad \delta V^i = \Gamma^i_{jk} V^j \delta x^k;$$

deci

$$\delta d V^i = \frac{\partial \Gamma^i_{jk}}{\partial x^l} V^j\, dx^k \delta x^l + \Gamma^i_{sk} \delta V^s\, dx^k + \Gamma^i_{jk} V^j \delta d x^k =$$

$$= \frac{\partial \Gamma^i_{jk}}{\partial x^l} V^j\, dx^k \delta x^l + \Gamma^i_{sk} \Gamma^s_{jl} V^j \delta x^l\, dx^k + \Gamma^i_{jk} V^j \delta d x^k.$$

Schimbăm simbolurile de diferenţiere d şi δ între ele:

$$d\delta V^i = \frac{\partial \Gamma^i_{jk}}{\partial x^l} V^j \delta x^k\, dx^l + \Gamma^i_{sk} \Gamma^s_{jl} V^j\, dx^l \delta x^k + \Gamma^i_{jk} V^j d\delta x^k =$$

$$= \frac{\partial \Gamma^i_{jl}}{\partial x^k} V^j \delta x^l\, dx^k + \Gamma^i_{sl} \Gamma^s_{jk} V^j\, dx^k \delta x^l + \Gamma^i_{jk} V^j\, d\delta x^k.$$

Deci

(7) $$\delta dV^i - d\delta V^i = \Gamma^i_{jkl} V^j \, dx^k \delta x^l + \Gamma^i_{jk} V^j \Delta x^k,$$

unde

(8) $$\Gamma^i_{jkl} = \frac{\partial \Gamma^i_{jk}}{\partial x^l} - \frac{\partial \Gamma^i_{jl}}{\partial x^k} + \Gamma^i_{sk}\Gamma^s_{jl} - \Gamma^i_{sl}\Gamma^s_{jk}.$$

Rezultă că, transportat prin paralelism de-a lungul unui circuit infinitezimal închis, vectorul V^i suferă variaţia

(9) $$\mathcal{D}V^i = \Gamma^i_{jkl} V^j \, dx^k \delta x^l ;$$

$\mathcal{D}V^i$, V^j, dx^k, δx^l fiind vectori, rezultă că Γ^i_{jkl} sînt componentele unui tensor. Spunem că Γ^i_{jkl} este tensorul de *curbură* al spaţiului A_n.

Dacă Γ^i_{jkl} este nul în punctul P, mărimea vectorului V^i în punctul S este aceeaşi, fie că ne-am deplasa pe drumul PQS, fie pe drumul $PRTS$. Dacă Γ^i_{jkl} sînt nule în toate punctele, spaţiul este fără curbură. În acest caz, transportul prin paralelism nu depinde de drumul urmat.

Spaţiul euclidian este un spaţiu fără curbură şi fără torsiune.

8. Aplicaţii. a) *Din formulele de transformare ale coeficienţilor conexiunii afine să se deducă caracterul tensorial al torsiunii.*

Avem în A_n, la o transformare de coordonate

$$\frac{\partial^2 x'^i}{\partial x^j \partial x^k} = \Gamma'^i_{rs} \frac{\partial x'^r}{\partial x^j} \frac{\partial x'^s}{\partial x^k} - \Gamma^r_{jk} \frac{\partial x'^i}{\partial x^r}.$$

Schimbăm indicii j şi k între ei:

$$\frac{\partial^2 x'^i}{\partial x^k \partial x^j} = \Gamma'^i_{sr} \frac{\partial x'^r}{\partial x^k} \frac{\partial x'^s}{\partial x^j} - \Gamma^r_{kj} \frac{\partial x'^i}{\partial x^r}.$$

Derivatele parţiale sînt permutabile; în primul termen din partea a doua schimbăm indicii r şi s între ei:

$$\frac{\partial^2 x'^i}{\partial x^j \partial x^k} = \Gamma'^i_{sr} \frac{\partial x'^r}{\partial x^j} \frac{\partial x'^s}{\partial x^k} - \Gamma^r_{kj} \frac{\partial x'^i}{\partial x^r}.$$

Scăzînd prima relaţie, obţinem

$$(\Gamma'^i_{rs} - \Gamma'^i_{sr}) \frac{\partial x'^r}{\partial x^j} \frac{\partial x'^s}{\partial x^k} = (\Gamma^r_{jk} - \Gamma^r_{kj}) \frac{\partial x'^i}{\partial x^r}$$

sau

$$T'^i_{rs} \frac{\partial x'^r}{\partial x^j} \frac{\partial x'^s}{\partial x^k} = T^r_{jk} \frac{\partial x'^i}{\partial x^r}.$$

b) *Să se verifice direct că dacă în A_n transportul paralel este independent de drum, spaţiul este fără curbură.*

Dacă vectorul contravariant V^i se transportă prin paralelism,

$$\frac{\partial V^i}{\partial x^k} = \Gamma^i_{jk} V^j ;$$

avem un sistem de ecuaţii cu derivate parţiale a cărui soluţie nu depinde de curba de-a lungul căreia se transportă vectorul; sistemul este complet integrabil, adică sînt satisfăcute condiţiile de integrabilitate

$$\frac{\partial}{\partial x^l} \frac{\partial V^i}{\partial x^k} = \frac{\partial}{\partial x^k} \frac{\partial V^i}{\partial x^l}$$

sau

$$\frac{\partial}{\partial x^l} \Gamma^i_{jk} V^j = \frac{\partial}{\partial x^k} \Gamma^i_{jl} V^j,$$

$$\frac{\partial \Gamma^i_{jk}}{\partial x^l} V^j + \Gamma^i_{sk} \frac{\partial V^s}{\partial x^l} = \frac{\partial \Gamma^i_{jl}}{\partial x^k} V^j + \Gamma^i_{sl} \frac{\partial V^s}{\partial x^k} ;$$

ţinem seama din nou de ecuaţiile sistemului iniţial:

$$\frac{\partial \Gamma^i_{jk}}{\partial x^l} V^j + \Gamma^i_{sk}\Gamma^s_{jl} V^j = \frac{\partial \Gamma^i_{jl}}{\partial x^k} V^j + \Gamma^i_{sl}\Gamma^s_{jk} V^j.$$

Aceste relaţii sînt satisfăcute oricare ar fi vectorul V^j, de unde rezultă

$$\Gamma^i_{jkl} = \frac{\partial \Gamma^i_{jk}}{\partial x^l} - \frac{\partial \Gamma^i_{jl}}{\partial x^k} + \Gamma^i_{sk}\Gamma^s_{jl} - \Gamma^i_{sl}\Gamma^s_{jk} = 0.$$

c) *Considerăm conexiunea afină A_n, ai cărei coeficienţi, într-un sistem de coordonate x, y, sînt daţi de*

(1) $$\Gamma^1_{22} = \Gamma^1_{21} = \Gamma^2_{22} = \frac{1}{y}, \quad \Gamma^2_{11} = -\frac{1}{y},$$

iar restul sînt nuli.

1. *Să se calculeze curbura și torsiunea.*
2. *Să se determine liniile autoparalele.*

Efectuăm transformarea

(2) $$u = \frac{1}{y}, \quad v = x.$$

3. *Să se calculeze noii coeficienți ai conexiunii.*
4. *Să se verifice caracterul tensorial al diferențialei absolute a unui vector.*

1. Conexiunea este simetrică: $\Gamma^i_{jk} = \Gamma^i_{kj}$, deci torsiunea este nulă. Pentru tensorul de curbură folosim formula

$$\Gamma^i_{jkl} = \frac{\partial \Gamma^i_{jk}}{\partial x^l} - \frac{\partial \Gamma^i_{jl}}{\partial x^k} + \Gamma^i_{sk}\Gamma^s_{jl} - \Gamma^i_{sl}\Gamma^s_{jk}.$$

În cazul nostru, $x^1 = x$, $x^2 = y$; singurele valori nenule sînt

(3) $$\Gamma^1_{212} = \frac{\partial \Gamma^1_{21}}{\partial y} + \Gamma^1_{21}\Gamma^2_{22} - \Gamma^1_{12}\Gamma^2_{21} = -\frac{1}{y^2},$$

$$\Gamma^2_{121} = -\frac{\partial \Gamma^2_{11}}{\partial y} + \Gamma^2_{22}\Gamma^2_{11} - \Gamma^2_{11}\Gamma^1_{12} = -\frac{1}{y^2}.$$

2. Ecuațiile liniilor autoparalele

$$\frac{d^2 x^i}{dt^2} = \Gamma^i_{jk} \frac{dx^j}{dt} \frac{dx^k}{dt}$$

devin

(4) $$\frac{d^2 x}{dt^2} = \frac{2}{y} \frac{dx}{dt} \frac{dy}{dt}, \quad \frac{d^2 y}{dt^2} = -\frac{1}{y}\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \frac{1}{y}\left(\frac{dy}{dt}\right)^2.$$

Din prima ecuație obținem

(5) $$\frac{dx}{dt} = Cy^2.$$

Eliminăm pe t; avem

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx} \frac{dx}{dt} = Cy^2 \frac{dy}{dx},$$

$$\frac{d^2 y}{dt^2} = C^2 y^4 \frac{d^2 y}{dx^2} + 2C^2 y^3 \left(\frac{dy}{dx}\right)^2.$$

A doua ecuație (4) devine

$$y \frac{d^2 y}{dx^2} + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + 1 = 0,$$

pe care o integrăm scriind-o succesiv:

$$\frac{d}{dx}\left(y \frac{dy}{dx}\right) + 1 = 0, \quad y \frac{dy}{dx} + x = a,$$

(6) $$(x - a)^2 + y^2 = b,$$

a b fiind constante; deci liniile autoparalele sînt cercuri cu centrul pe axa Ox.

3. Folosim formulele de transformare ale coeficienților conexiunii

$$\frac{\partial^2 x'^i}{\partial x^j \partial x^k} = \Gamma'^i_{rs} \frac{\partial x'^r}{\partial x^j} \frac{\partial x'^s}{\partial x^k} - \Gamma^r_{jk} \frac{\partial x'^i}{\partial x^r}.$$

Rolul variabilelor fiind simetric, putem să le scriem sub forma inversă

$$\frac{\partial^2 x^i}{\partial x'^j \partial x'^k} = \Gamma^i_{rs} \frac{\partial x^r}{\partial x'^j} \frac{\partial x^s}{\partial x'^k} - \Gamma'^r_{jk} \frac{\partial x^i}{\partial x'^r};$$

rezolvăm în raport cu coeficienții noi, înmulțind cu $\frac{\partial x'^t}{\partial x^i}$; avem

(7) $$\Gamma'^j_{jk} = \Gamma^t_{rs} \frac{\partial x^r}{\partial x'^j} \frac{\partial x^s}{\partial x'^k} \frac{\partial x'^i}{\partial x^t} \quad \frac{\partial x'^i}{\partial x^p} \frac{\partial^2 x^p}{\partial x'^j \partial x'^k}.$$

În cazul nostru

$$x^1 = x, \quad x^2 = y, \quad x'^1 = u, \quad x'^2 = v$$

și din transformarea (2)

$$\frac{\partial x}{\partial u} = 0, \quad \frac{\partial x}{\partial v} = 1, \quad \frac{\partial y}{\partial u} = -\frac{1}{u^2}, \quad \frac{\partial y}{\partial v} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -u^2.$$

Avem

$$\Gamma'^1_{11} = \Gamma^t_{rs} \frac{\partial x^r}{\partial u} \frac{\partial x^s}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x^t} - \frac{\partial u}{\partial x^p} \frac{\partial^2 x^p}{\partial u^2};$$

trebuie să luăm $r = 2$, $s = 2$, $t = 2$, $p = 2$; atunci

$$\Gamma'^{1}_{11} = \frac{1}{u}. \tag{8}$$

Analog obținem

$$\Gamma'^{1}_{22} = u^3, \quad \Gamma'^{2}_{12} = \Gamma'^{2}_{21} = -\frac{1}{u} \tag{9}$$

și restul sînt nuli.

4. Diferențiala absolută a vectorului contravariant A^i este

$$\mathrm{D}A^i = \mathrm{d}A^i - \Gamma^i_{jk} A^j \,\mathrm{d}x^k ;$$

deci

$$\mathrm{D}A^1 = \mathrm{d}A^1 - \Gamma^1_{12}A^1 \,\mathrm{d}y - \Gamma^1_{21}A^2 \,\mathrm{d}x = \mathrm{d}A^1 - \frac{1}{y}(A^1 \,\mathrm{d}y + A^2 \,\mathrm{d}x),$$

$$\mathrm{D}A^2 = \mathrm{d}A^2 - \Gamma^2_{11}A^1 \,\mathrm{d}x - \Gamma^2_{22}A^2 \,\mathrm{d}y = \mathrm{d}A^1 + \frac{1}{y}(A^1 \,\mathrm{d}x - A^2 \,\mathrm{d}y).$$

După transformarea (2), proiecțiile vectorului devin

$$A'^i = A^j \frac{\partial x'^i}{\partial x^j},$$

adică

$$A'^1 = A^j \frac{\partial u}{\partial x^j} = A^2 \frac{\partial u}{\partial y} = -u^2A^2, \quad A'^2 = A^j \frac{\partial v}{\partial x^j} = A^1.$$

Scriem diferențiala absolută după transformare

$$\mathrm{D}A'^i = \mathrm{d}A'^i - \Gamma'^i_{jk}A'^j \,\mathrm{d}x'^k,$$

adică

$$\mathrm{D}A'^1 = \mathrm{d}A'^1 - \Gamma'^1_{11}A'^1 \,\mathrm{d}u - \Gamma'^1_{22}A'^2 \,\mathrm{d}v =$$

$$= \mathrm{d}(-u^2A^2) - \frac{1}{u}(-u^2A^2)\,\mathrm{d}u - u^3A^1 \,\mathrm{d}v =$$

$$= -u^2 \,\mathrm{d}A^2 + uA^2 \,\mathrm{d}u - u^3A^1 \,\mathrm{d}v ;$$

înlocuind pe u, v în raport cu x și y,

$$\mathrm{D}A'^1 = -\frac{1}{y^2}\,\mathrm{d}A^2 + \frac{1}{y^3}A^2 \mathrm{d}y - \frac{1}{y^3}A^1 \,\mathrm{d}x = -\frac{1}{y^2}\,\mathrm{D}A^2.$$

Analog

$$\mathrm{D}A'^2 = \mathrm{d}A'^2 - \Gamma'^2_{12}A'^1 \,\mathrm{d}v - \Gamma'^2_{21}A'^2 \mathrm{d}u =$$

$$= \mathrm{d}A^1 + \frac{1}{u}(-u^2A^2)\,\mathrm{d}v + \frac{1}{u}A^1 \,\mathrm{d}u = \mathrm{D}A^1$$

În adevăr $\quad \mathrm{D}A'^i = \dfrac{\partial x'^i}{\partial x^j}\mathrm{D}A^j$; adică

$$\mathrm{D}A'^1 = \frac{\partial u}{\partial y}\mathrm{D}A^2 = -\frac{1}{y^2}\mathrm{D}A^2, \quad \mathrm{D}A'^2 = \frac{\partial v}{\partial x}\mathrm{D}A^1 = \mathrm{D}A^1.$$

C. SPAȚIU RIEMANNIAN

1. Lungime. Unghi. a) Spunem că un spațiu X_n este *riemannian* și îl notăm cu V_n, dacă partea principală a distanței dintre două puncte vecine este dată de formula

$$\mathrm{d}s^2 = a_{ij}\,\mathrm{d}x^i\,\mathrm{d}x^j, \quad (i,\ j, = 1,\ 2,\ \ldots,\ n) \tag{1}$$

unde a_{ij} sînt componentele unui tensor covariant de ordinul al doilea, simetric

$$a_{ij} = a_{ji}. \tag{2}$$

Forma $\mathrm{d}s^2$, invariantă la o transformare de coordonate este presupusă nesingulară :

$$a = |a_{ij}| \neq 0 \tag{3}$$

și definită pozitiv.

b) Spațiul riemannian este complet determinat de tensorul simetric a_{ij}, pe care îl numim *fundamental*. Cu ajutorul lui putem să ex-

primăm unele noțiuni cu caracter metric. Astfel, X^i fiind componentele unui vector contravariant, expresia

$$X^2 = a_{ij}X^iX^j \tag{4}$$

este un invariant. Spunem că X este *lungimea* vectorului X^i.

Mai general, pentru doi vectori contravarianți X^i, Y^i, expresia

$$X \cdot Y = a_{ij}X^iY^j \tag{5}$$

este un invariant. Spunem că $X \cdot Y$ este *produsul scalar* al vectorilor X^i, Y^i în sensul metricii (1). În particular expresia

$$\cos u = \frac{a_{ij}\,\mathrm{d}x^i\delta x^j}{\sqrt{a_{ij}\,\mathrm{d}x^i\mathrm{d}x^j}\sqrt{a_{ij}\,\delta x^i\,\delta x^j}} \tag{6}$$

este invariantă. Spunem că u este unghiul direcțiilor d și δ, iar vectorii sînt *ortogonali*, dacă

$$X \cdot Y = a_{ij}X^iY^j = 0. \tag{7}$$

c) Fie X^i componentele contravariante ale unui vector X; atunci expresiile

$$X_i = a_{ij}X^j \tag{8}$$

sînt componentele unui vector covariant; spunem că sînt componentele covariante ale aceluiași vector X. Fie și a^{ij} minorii normați ai elementelor a_{ij} în determinantul $a = |a_{ij}|$, deci

$$a_{ik}a^{jk} = \delta_i^j. \tag{9}$$

Putem să inversăm atunci relația (8) sub forma

$$X^i = a^{ij}X_j, \tag{10}$$

adică să exprimăm componentele contravariante X^i, cînd sînt cunoscute componentele covariante. Putem să scriem atunci produsul scalar sub forma

$$X \cdot Y = X_iY^i = X^iY_i. \tag{11}$$

2. Simbolurile Christoffel. Identitățile Ricci. a) Cu ajutorul tensorului metric a_{ij} al unui spațiu riemannian V_n, formăm expresiile

$$(ijk) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial a_{jk}}{\partial x^i} + \frac{\partial a_{ik}}{\partial x^j} - \frac{\partial a_{ij}}{\partial x^k}\right), \tag{1}$$

pe care le numim *simbolurile Christoffel* de prima speță ale metricii a_{ij}. Simbolurile Christoffel de a doua speță sînt definite prin

$$\left\{ {l \atop i\ j} \right\} = a^{lk}(ijk), \tag{2}$$

a^{lk} fiind minorii normați ai elementelor a_{lk} în $a = |a_{lk}|$. Din definiție rezultă că

$$(ijk) = (jik), \quad \left\{ {l \atop i\ j} \right\} = \left\{ {l \atop j\ i} \right\}. \tag{3}$$

Avem și invers,

$$(ijk) = a_{kl}\left\{ {l \atop i\ j} \right\}, \tag{4}$$

deoarece

$$a_{kl}\left\{ {l \atop i\ j} \right\} = a_{kl}a^{lh}(ijh) = \delta_k^h(ijh) = (ijk).$$

b) Avem identitățile Ricci

$$\frac{\partial a_{ij}}{\partial x^k} = a_{si}\left\{ {s \atop j\ k} \right\} + a_{sj}\left\{ {s \atop i\ k} \right\}. \tag{5}$$

În adevăr

$$a_{si}\left\{ {s \atop j\ k} \right\} + a_{sj}\left\{ {s \atop i\ k} \right\} = (jki) + (ikj) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial a_{ki}}{\partial x^j} + \frac{\partial a_{ij}}{\partial x^k} - \frac{\partial a_{jk}}{\partial x^i}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial a_{kj}}{\partial x^i} + \frac{\partial a_{ij}}{\partial x^k} - \frac{\partial a_{ik}}{\partial x^j}\right) = \frac{\partial a_{ij}}{\partial x^k}.$$

3. Curbura unui spaţiu V_n. a) Asociem unui spaţiu Riemann V_n o conexiune afină, luînd coeficienţii de conexiune egali cu simbolurile Christoffel de a doua speţă, cu semn schimbat:

(1) $$\Gamma^i_{jk} = -\begin{Bmatrix} i \\ j\ k \end{Bmatrix}.$$

Un astfel de spaţiu este simetric,

(2) $$\Gamma^i_{jk} = \Gamma^i_{kj},$$

deci fără torsiune

(3) $$T^i_{jk} = \Gamma^i_{jk} - \Gamma^i_{kj} = 0.$$

Din identităţile Ricci rezultă *lema Ricci*: *derivata covariantă a tensorului fundamental este nulă*:

(4) $$a_{ij;k} = 0.$$

În adevăr

$$a_{ij,k} = \frac{\partial a_{ij}}{\partial x^k} + a_{sj}\Gamma^s_{ik} + a_{is}\Gamma^s_{jk} =$$

$$= \frac{\partial a_{ij}}{\partial x^k} - a_{sj}\begin{Bmatrix} s \\ i\ k \end{Bmatrix} - a_{is}\begin{Bmatrix} s \\ j\ k \end{Bmatrix} = 0.$$

b) Tensorul de curbură al unui spaţiu cu conexiune afină

(5) $$\Gamma^i_{jkl} = \frac{\partial \Gamma^i_{jk}}{\partial x^l} - \frac{\partial \Gamma^i_{jl}}{\partial x^k} + \Gamma^i_{sk}\Gamma^s_{jl} - \Gamma^i_{sl}\Gamma^s_{jk}$$

devine, ţinînd seama de (1),

(6) $$R^i_{jkl} = \frac{\partial \begin{Bmatrix} i \\ j\ l \end{Bmatrix}}{\partial x^k} - \frac{\partial \begin{Bmatrix} i \\ j\ k \end{Bmatrix}}{\partial x^l} + \begin{Bmatrix} i \\ s\ k \end{Bmatrix}\begin{Bmatrix} s \\ j\ l \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} i \\ s\ l \end{Bmatrix}\begin{Bmatrix} s \\ j\ k \end{Bmatrix}.$$

Expresiile R^i_{jkl} sînt *simbolurile Riemann* de a doua speţă ale spaţiului considerat. Componentele covariante ale acestui tensor

(7) $$R_{ijkl} = a_{hi}R^h_{jkl}$$

sînt simbolurile Riemann de prima speţă.

Tensorul contractat

(8) $$R_{jl} = R^i_{jil}$$

este numit *tensorul Ricci*. Invariantul

(9) $$R = a^{jl}R_{jl}$$

este *invariantul lui Ricci*.

4. Geodezicele spaţiului V_n. a) Spaţiului Riemann, de metrică

(1) $$ds^2 = a_{ij}\,dx^i\,dx^j,$$

i-am asociat o conexiune afină, de coeficienţi

(2) $$\Gamma^i_{jk} = -\begin{Bmatrix} i \\ j\ k \end{Bmatrix},$$

$\begin{Bmatrix} i \\ j\ k \end{Bmatrix}$ fiind simbolurile Christoffel de a doua speţă.

Curbele autoparalele ale spaţiului A_n cu conexiune afină sînt date de

$$\frac{d^2x^i}{dt^2} = \Gamma^i_{jk}\frac{dx^j}{dt}\frac{dx^k}{dt}.$$

În cazul spaţiului riemannian, ele devin

(3) $$\frac{d^2x^i}{dt^2} + \begin{Bmatrix} i \\ j\ k \end{Bmatrix}\frac{dx^j}{dt}\frac{dx^k}{dt} = 0,$$

cu aceleaşi proprietăţi geometrice, din A_n. În V_n ele se bucură de o proprietate nouă: *Liniile autoparalele ale unui spaţiu riemannian sînt geodezicele spaţiului.*

b) În adevăr fie

(4) $$x^i = x^i(t)$$

ecuaţiile unei curbe în V_n. Lungimea unui arc de curbă este

(5) $$l = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{L}\, \mathrm{d}t,$$

unde

(6) $$L = a_{ij}\frac{\mathrm{d}x^i}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}x^j}{\mathrm{d}t} = a_{ij}(x^1, x^2, \ldots, x_n)\, \dot{x}^i \dot{x}^j,$$

notînd prin puncte derivarea în raport cu t.

Curba este geodezică, dacă lungimea ei este minimă. Din calculul variaţiilor ştim că

$$\int_{t_1}^{t_2} f(x^1, x^2, \ldots, x^n;\ \dot{x}^1, \dot{x}^2, \ldots, \dot{x}^n)\, \mathrm{d}t$$

este un extremum, dacă

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial f}{\partial \dot{x}^k} - \frac{\partial f}{\partial x^k} = 0 \quad (k = 1, 2, \ldots, n).$$

Deoarece $\mathrm{d}\sqrt{L} = \frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}L}{\sqrt{L}}$, obţinem pentru $f = \sqrt{L}$, condiţia

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^k} - \frac{\partial L}{\partial x^k} = 0.$$

c) Avem în cazul nostru

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^k} = a_{ij}\delta^i_k \dot{x}^j + a_{ij}\dot{x}^i \delta^j_k = a_{kj}\dot{x}^j + a_{ki}\dot{x}^i = 2a_{ik}\dot{x}^i;$$

deci

$$2a_{ik}\ddot{x}^i + \frac{\partial a_{ki}}{\partial x^j}\dot{x}^j \dot{x}^i + \frac{\partial a_{kj}}{\partial x^i}\dot{x}^i \dot{x}^j - \frac{\partial a_{ij}}{\partial x^k}\dot{x}^i \dot{x}^j = 0.$$

Ţinînd seama de simbolurile Christoffel

$$(ijk) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial a_{jk}}{\partial x^i} + \frac{\partial a_{ki}}{\partial x^j} - \frac{\partial a_{ij}}{\partial x^k}\right),$$

rezultă

$$a_{ki}\ddot{x}^i + (ijk)\dot{x}^i \dot{x}^j = 0.$$

Înmulţim cu a^{kl} şi sumăm în raport cu k; obţinem

$$\ddot{x}^l + \left\{ {l \atop i\ \ j} \right\} \dot{x}^i \dot{x}^j = 0$$

adică formulele (3).

5. **Aplicaţii.** a) *Considerăm metrica*

(1) $$\mathrm{d}s^2 = \frac{\mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2}{x^2 + y^2}.$$

1. *Să se calculeze simbolurile Christoffel.*
2. *Să se verifice identităţile Ricci.*
3. *Să se calculeze curbura riemanniană.*

Avem

$$a_{11} = a_{22} = \frac{1}{x^2 + y^2}, \quad a_{12} = 0, \quad x^1 = x, \quad x^2 = y.$$

1. Pentru simbolurile Christoffel de prima speţă avem formulele

$$(ijk) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial a_{ik}}{\partial x^j} + \frac{\partial a_{jk}}{\partial x^i} - \frac{\partial a_{ij}}{\partial x^k}\right).$$

Avem

(2)
$$
\begin{aligned}
(111) &= \frac{1}{2}\frac{\partial a_{11}}{\partial x} = -\frac{x}{(x^2 + y^2)^2},\\
(112) &= \frac{1}{2}\left(2\frac{\partial a_{12}}{\partial x} - \frac{\partial a_{11}}{\partial y}\right) = \frac{y}{(x^2 + y^2)^2},\\
(121) &= \frac{1}{2}\frac{\partial a_{11}}{\partial y} = -\frac{y}{(x^2 + y^2)^2},\\
(122) &= \frac{1}{2}\frac{\partial a_{22}}{\partial x} = -\frac{x}{(x^2 + y^2)^2},\\
(221) &= \frac{1}{2}\left(2\frac{\partial a_{12}}{\partial y} - \frac{\partial a_{22}}{\partial x}\right) = \frac{x}{(x^2 + y^2)^2},\\
(222) &= \frac{1}{2}\frac{\partial a_{22}}{\partial y} = -\frac{y}{(x^2 + y^2)^2}.
\end{aligned}
$$

Discriminantul formei (1) este

$$a = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix} = \frac{1}{(x^2+y^2)^2},$$

deci

(3) $$a^{11} = \frac{\text{minor } a_{11}}{a} = \frac{a_{22}}{a} = x^2+y^2 = a^{22}, \quad a^{12} = 0.$$

Calculăm simbolurile Christoffel de a doua speță, cu formula $\left({i \atop j\;k}\right) = a^{il}(jkl)$. Avem

$$\left({1 \atop 1\;1}\right) = a^{11}(111) = -\frac{x}{x^2+y^2}, \qquad \left({1 \atop 1\;2}\right) = a^{11}(121) = -\frac{y}{x^2+y^2},$$

(4) $$\left({1 \atop 2\;2}\right) = a^{11}(221) = \frac{x}{x^2+y^2}, \qquad \left({2 \atop 1\;1}\right) = a^{22}(112) = \frac{y}{x^2+y^2},$$

$$\left({2 \atop 1\;2}\right) = a^{22}(122) = -\frac{x}{x^2+y^2}, \qquad \left({2 \atop 2\;2}\right) = a^{22}(222) = -\frac{y}{x^2+y^2}.$$

2. Identitățile Ricci

$$\frac{\partial a_{ij}}{\partial x^k} = a_{is}\left({s \atop j\;k}\right) + a_{js}\left({s \atop j\;k}\right)$$

devin

$$\frac{\partial a_{11}}{\partial x} = 2a_{11}\left({1 \atop 1\;1}\right), \qquad \frac{\partial a_{11}}{\partial y} = 2a_{11}\left({1 \atop 1\;2}\right)$$

și analoagele, simetrice, verificate imediat, cu formulele calculate precedent.

3. Avem pentru curbură

$$R^i_{jkl} = \frac{\partial\left({i \atop j\;l}\right)}{\partial x^k} - \frac{\partial\left({i \atop j\;k}\right)}{\partial x^l} + \left({i \atop s\;k}\right)\left({s \atop j\;l}\right) - \left({i \atop s\;l}\right)\left({s \atop j\;k}\right).$$

Valori distincte sînt

$$R^1_{212} = \frac{\partial\left({1 \atop 2\;2}\right)}{\partial x} - \frac{\partial\left({1 \atop 2\;1}\right)}{\partial y} + \left({1 \atop 1\;1}\right)\left({1 \atop 2\;2}\right) + \left({1 \atop 2\;1}\right)\left({2 \atop 2\;2}\right) -$$

$$-\left({1 \atop 1\;2}\right)\left({1 \atop 2\;1}\right) - \left({1 \atop 2\;2}\right)\left({2 \atop 2\;1}\right) = \frac{1}{x^2+y^2} - \frac{2x^2}{(x^2+y^2)^2} + \frac{1}{x^2+y^2} -$$

$$-\frac{2y^2}{(x^2+y^2)^2} - \frac{x^2}{(x^2+y^2)^2} + \frac{y^2}{(x^2+y^2)^2} - \frac{y^2}{(x^2+y^2)^2} + \frac{x^2}{(x^2+y^2)^2} = 0$$

și analog $R^2_{121} = 0$.

Rezultă că metrica (1) este euclidiană, ceea ce verificăm direct prin substituția

$$x = e^u \cos v, \qquad y = e^u \sin v.$$

b) *Să se determine liniile geodezice ale metricii*

(5) $$ds^2 = \frac{dx^2 + dy^2}{y^2}.$$

Avem

$$a_{11} = a_{22} = \frac{1}{y^2}, \quad a_{12} = 0, \quad a^{11} = a^{22} = y^2, \quad a^{12} = 0.$$

Obținem simbolurile Christoffel de prima speță

(6) $$(112) = \frac{1}{y^3}, \quad (121) = (211) = -\frac{1}{y^3}, \quad (222) = -\frac{1}{y^3}$$

și restul nule; iar simbolurile de speța a doua

(7) $$\left({1 \atop 1\;2}\right) = \left({1 \atop 2\;1}\right) = -\frac{1}{y}, \quad \left({2 \atop 1\;1}\right) = \frac{1}{y}, \quad \left({2 \atop 2\;2}\right) = -\frac{1}{y}$$

și restul nule. Luînd $\Gamma^i_{jk} = -\left({i \atop j\;k}\right)$, obținem un spațiu cu conexiune afină, tratat într-un exemplu precedent. Deci geodezicele, curbe autoparalele ale spațiului precedent sînt cercuri cu centrul pe axa Ox.

c) *Considerăm metrica*

$$ds^2 = d\rho^2 + \rho^2\, d\theta^2. \tag{8}$$

Să se determine geodezicele.

Avem o metrică de forma

$$ds^2 = a_{ij}\, dx^i\, dx^j,$$

unde $x^1 = \rho$, $x^2 = \theta$, $a_{11} = 1$, $a_{12} = a_{21} = 0$, $a_{22} = \rho^2$. Simbolurile Christoffel de prima speţă

$$(ijk) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial a_{ik}}{\partial x^j} + \frac{\partial a_{jk}}{\partial x^i} - \frac{\partial a_{ij}}{\partial x^k}\right)$$

devin $(122) = \rho$, $(221) = -\rho$, şi restul nule. Avem

$$a = |a_{ij}| = \rho^2;$$

minorii normaţi sînt

$$a^{11} = 1, \quad a^{12} = a^{21} = 0, \quad a^{22} = \frac{1}{\rho^2}.$$

Pentru simbolurile Christoffel de a doua speţă

$$\begin{pmatrix} l \\ i \quad j \end{pmatrix} = a^{lk}(ijk)$$

avem

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \quad 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \quad 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\rho}, \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \quad 2 \end{pmatrix} = -\rho \tag{9}$$

şi restul nule.

Ecuaţiile geodezicelor

$$\frac{d^2x^i}{dt^2} + \begin{pmatrix} i \\ j \quad k \end{pmatrix} \frac{dx^j}{dt}\frac{dx^k}{dt} = 0$$

devin în cazul nostru

$$\frac{d^2x^1}{dt^2} + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \quad 2 \end{pmatrix}\left(\frac{dx^2}{dt}\right)^2 = 0,$$

$$\frac{d^2x^2}{dt^2} + \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \quad 1 \end{pmatrix}\frac{dx^2}{dt}\frac{dx^1}{dt} + \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \quad 2 \end{pmatrix}\frac{dx^1}{dt}\frac{dx^2}{dt} = 0,$$

adică

$$\rho'' - \rho\theta'^2 = 0, \quad \theta'' + \frac{2}{\rho}\rho'\theta' = 0. \tag{10}$$

Scriem a doua ecuaţie sub forma

$$\frac{\theta''}{\theta'} + 2\frac{\rho'}{\rho} = 0, \quad \ln\theta' + 2\ln\rho = \text{const},$$

deci $\theta' = \dfrac{k}{\rho^2}$. Înlocuind în prima ecuaţie, avem

$$\rho'' - \frac{k^2}{\rho^3} = 0;$$

înmulţim cu ρ':

$$\rho'\rho'' - k^2\frac{\rho'}{\rho^3} = 0, \quad \frac{\rho'^2}{2} + \frac{1}{2}\frac{k^2}{\rho^2} = \frac{C}{2},$$

$$\frac{\rho\rho'}{\sqrt{C\rho^2 - k^2}} = 1, \quad \sqrt{C\rho^2 - k^2} = C(t - t_0),$$

$$\rho = \sqrt{C(t - t_0)^2 + \frac{k^2}{C}}. \tag{11}$$

Revenim la

$$\theta' = \frac{k}{\rho^2} = \frac{kC}{C^2(t - t_0)^2 + k^2};$$

deci

$$\theta = \operatorname{arctg}\frac{t - t_0}{k} + \theta_0. \tag{12}$$

Avem deci soluţia (11), (12). Eliminînd pe t, obţinem

$$\rho = \frac{a}{\cos(\theta' - \theta_0)}. \tag{13}$$

Dealtfel, (8) este metrica planului euclidian, raportat la coordonate polare iar (13) sînt ecuaţiile dreptelor în coordonate polare.

Calculînd curbura spaţiului cu formulele (9), verificăm că toate simbolurile Riemann sînt nule.

D. CONGRUENȚE

1. Formă canonică. a) Numim *congruență* de curbe a spațiului X_n, o familie de curbe, care are proprietatea că prin fiecare punct al spațiului trece cîte o curbă a familiei.

Fie $P(x^1, x^2, \ldots, x^n)$ un punct în X_n și vectorul $a(a^1, a^2, \ldots, a^n)$. Dacă $Q(x^i + dx^i)$ este un punct situat pe o curbă a congruenței, vecin de P, iar a^i este vectorul tangent în P, atunci

$$\frac{dx^1}{a^1} = \frac{dx^2}{a^2} = \ldots = \frac{dx^n}{a^n}. \tag{1}$$

Ecuațiile (1) determină o familie de curbe, depinzînd de $n - 1$ parametri

$$f^\alpha(x^1, x^2, \ldots, x^n) = C^\alpha, \ (\alpha = 1, 2, \ldots, n - 1); \tag{2}$$

C^α sînt constante, pe care le determinăm prin condiția ca prin punctul P să treacă o curbă (2). Deci (1) sînt ecuațiile diferențiale ale unei congruențe de curbe. Componentele a^i sînt *parametrii* congruenței. O congruență este cunoscută odată cu parametrii ei, a^i.

b) Într-o schimbare arbitrară de coordonate

$$x'^i = x'^i(x^1, x^2, \ldots, x^n), \ (i = 1, 2, \ldots, n), \tag{3}$$

avem

$$dx'^i = \frac{\partial x'^i}{\partial x^j} dx^j, \quad a'^i = \frac{\partial x'^i}{\partial x^j} a^j;$$

,cide amplificînd în (1) fiecare raport $\frac{dx^j}{a^j}$ prin $\frac{\partial x'^i}{\partial x^j}$ și adunînd numărătorii între ei și numitorii între ei, obținem rapoartele $\frac{dx'^i}{a'^i}$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ egale cu (1); adică, în noile coordonate, avem

$$\frac{dx'^1}{a'^1} = \frac{dx'^2}{a'^2} = \ldots = \frac{dx'^n}{a'^n}. \tag{4}$$

Congruența este, evident, aceeași, dar ecuația ei este formal, diferită.

c) Presupunem că în (1) efectuăm chiar transformarea

$$x'^\alpha = f^\alpha(x^1, x^2, \ldots, x^n), \ (\alpha = 1, 2, \ldots, n - 1) \tag{5}$$

f^α fiind date de (2), iar x'^n rămînînd arbitrar. În acest caz, ecuațiile transformate (4) devin

$$\frac{dx'^1}{0} = \frac{dx'^2}{0} = \ldots = \frac{dx'^n}{a'^n}. \tag{6}$$

Deci *putem să aducem o congruență de curbe la forma canonică*

$$x^\alpha = c^\alpha, \ (\alpha = 1, 2, \ldots, n - 1), \tag{7}$$

care are ca imagine familia de drepte paralele cu axa x^n, într-un spațiu E_n asociat.

Ecuațiile (6) arată de asemenea că printr-o transformare convenabilă de coordonate, *putem să reducem un vector contravariant* a^i *la forma canonică*

$$(0, 0, \ldots, 0, 1). \tag{8}$$

2. Operatori asociați congruențelor. Paranteza Poisson. Unei congruențe, deci unui vector contravariant a^i, putem să-i asociem *operatorul* invariant

$$A(f) = a^i \frac{\partial f}{\partial x^i}, \tag{1}$$

$f(x^1, x^2, \ldots, x^n)$ fiind o funcție arbitrară, sau, pe scurt,

$$A = a^i \frac{\partial}{\partial x^i}. \tag{1'}$$

Fie a^i, b^i doi vectori contravarianți. Ei determină două congruențe independente, dacă a^i, b^i sînt ei înșiși vectori independenți. Fie B operatorul definit de congurența b,

$$B(f) = b^i \frac{\partial f}{\partial x^i}.$$

Aplicăm operatorului B operatorul A:

$$A(B) = a^j \frac{\partial}{\partial x^j}\left(b^i \frac{\partial f}{\partial x^i}\right) = a^j \frac{\partial b^i}{\partial x^j}\frac{\partial f}{\partial x^i} + a^j b^i \frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j}.$$

Combinăm cu operatorul $B(A)$ şi obţinem un nou operator linear

$$(2) \qquad (AB) = A(B) - B(A) = \left(a^j \frac{\partial b^i}{\partial x^j} - b^j \frac{\partial a^i}{\partial x^j}\right) \frac{\partial f}{\partial x^i},$$

pe care îl numim *paranteză Poisson*. Operatorii A, B fiind invarianţi, paranteza (AB) este de asemenea un invariant; deoarece $\frac{\partial f}{\partial x^i}$ sînt componentele unui vector covariant, rezultă că

$$(3) \qquad c^i = a^j \frac{\partial b^i}{\partial x^j} - b^j \frac{\partial a^i}{\partial x^j}$$

sînt componentele unui vector contravariant. Deci expresia (AB) este de forma (1), adică un nou operator. Paranteza Poisson ataşază astfel celor două congruenţe a, b o altă congruenţă c, de parametri (3).

Dacă c^i sînt toţi nuli, spunem că operatorii A şi B sînt *permutabili*:

$$(4) \qquad A(B) = B(A).$$

Dacă paranteza (AB) este linear dependentă de operatorii A, B, spunem că sistemul de operatori A, B este *complet*.

3. Sistem de congruenţe. a) Considerăm în spaţiul X_n, n congruenţe independente

$$(1) \qquad \frac{dx^1}{\mu^1_a} = \frac{dx^2}{\mu^2_a} = \dots = \frac{dx^n}{\mu^n_a}, \quad (a = 1, 2, \dots n),$$

unde μ^i_a sînt n vectori contravarianţi daţi (iar a un simplu indice de numărătoare). Prin fiecare punct P trec n curbe, cîte una din fiecare congruenţă. Congruenţele fiind independente, determinantul

$$\mu = |\mu^i_a| \neq 0.$$

Fie λ^a_i minorii normaţi ai elementelor μ^i_a din determinantul μ; atunci

$$(2) \qquad \lambda^a_i \mu^j_a = \delta^j_i, \quad \lambda^a_i \mu^i_b = \delta^a_b,$$

deci λ^a_i sînt componentele a n vectori covarianţi; cu ajutorul lor putem să construim n forme diferenţiale lineare (forme Pfaff):

$$(3) \qquad ds^a = \lambda^a_i \, dx^i,$$

sau, rezolvînd invers,

$$(4) \qquad dx^i = \mu^i_a \, ds^a.$$

Spunem că s^a sînt *arce* pe congruenţele (1), μ^i_a sînt *parametri* iar λ^a_i *momentele* congruenţelor. Pentru o anumită curbă a congruenţei, toate ds^a sînt nule, afară de una, fie chiar ds^a, cu a fix. Atunci ds^a este chiar valoarea comună a rapoartelor (1).

Cele n congruenţe care trec printr-un punct P formează un sistem de congruenţe, care generalizează un sistem de axe de coordonate.

b) Prin formulele (3) trecem de la vectorul contravariant dx^i (în coordonate), la vectorul contravariant ds^a (în congruenţe). În general, fiind dat un vector contravariant V^i (în coordonate), mărimile

$$(5) \qquad v^a = \lambda^a_i V^i$$

sînt *proiecţiile* lui pe congruenţele (1). Înmulţind cu μ^j_a şi sumînd în raport cu a, ţinînd seama de (2), obţinem formula inversă

$$(6) \qquad V^i = \mu^i_a v^a.$$

Fie acum $f(x^1, x^2, \dots, x^n)$ o funcţie arbitrară; prin substituţiile (4) ea devine o funcţie de $s^1, s^2, \dots, s^n$; avem

$$(7) \qquad \frac{\partial f}{\partial s^a} = \frac{\partial f}{\partial x^i}\frac{\partial x^i}{\partial s^a} = \mu^i_a \frac{\partial f}{\partial x^i}.$$

Mai general, dacă V_i este un vector covariant (în coordonate), spunem că

$$(8) \qquad v_a = \mu^i_a V_i$$

sînt proiecţiile vectorului pe congruenţe. Rezultă şi formula inversă

$$(9) \qquad V_i = \lambda^a_i v_a.$$

În cazul cel mai general, proiecţiile pe congruenţe ale unui tensor $V^{i_1 i_2 \dots i_p}_{j_1 j_2 \dots j_q}$ sînt, prin definiţie, date de

$$(10) \qquad v^{a_1 a_2 \dots a_p}_{b_1 b_2 \dots b_q} = V^{i_1 i_2 \dots i_p}_{j_1 j_2 \dots j_q} \lambda^{a_1}_{i_1} \lambda^{a_2}_{i_2} \dots \lambda^{a_p}_{i_p} \mu^{j_1}_{b_1} \mu^{j_2}_{b_2} \dots \mu^{j_q}_{b_q}.$$

4 — c. 1767

4. Sistem de operatori. a) Dacă s^a sînt arcele, μ_a^i parametrii și λ_i^a momentele unui sistem de congruențe independente ($i = 1, 2, \ldots$ $\ldots, n$; $a = 1, 2, \ldots, n$) avem relațiile

$$\lambda_i^a \mu_a^j = \delta_i^j, \quad \lambda_i^a \mu_b^i = \delta_b^a, \tag{1}$$

$$ds^a = \lambda_i^a dx^i, \tag{2}$$

$$dx^i = \mu_a^i ds^a; \tag{3}$$

ds^a ($a = 1, 2, \ldots, n$) sînt n forme diferențiale de primul ordin, numite *forme Pfaff*, în dx^i, date de (2) iar (3) sînt formele Pfaff inversate.

Cu ajutorul vectorilor contravarianți μ_a^i introducem operatorii

$$X_a(f) = \mu_a^i \frac{\partial f}{\partial x^i} = \frac{\partial f}{\partial x^i}\frac{\partial x^i}{\partial s^a} = \frac{\partial f}{\partial s^a},$$

deci

$$X_a = \mu_a^i \frac{\partial}{\partial x^i} = \frac{\partial}{\partial s^a}. \tag{4}$$

paarantezele sistemului celor n operatori X_a sînt deci

$$(X_a X_b) f = \frac{\partial^2 f}{\partial s^a \partial s^b} - \frac{\partial^2 f}{\partial s^b \partial s^a}; \tag{5}$$

derivatele de ordinul al doilea, în variabilele s^a nu sînt în general simetrice, deoarece s^a sînt definite prin expresii diferențiale nu totdeauna integrabile, adică s^a sînt variabile *neolonome*.

b) Operatorii X_a fiind independenți și anume, numărul maxim de operatori independenți, putem să exprimăm linear orice alt operator, de aceeași formă, cu ajutorul lor. De exemplu, parantezele, care sînt tot operatori de forma (4), sînt combinații lineare de acești operatori:

$$(X_b X_c) = w_{bc}^a X_a, \tag{6}$$

w_{bc}^a fiind coeficienți pe care îi determinăm din (4), cu formula cunoscută a parantezei; anume

$$(X_b X_c) = \left(\mu_b^j \frac{\partial \mu_c^i}{\partial x^j} - \mu_c^j \frac{\partial \mu_b^i}{\partial x^j}\right)\frac{\partial}{\partial x^i} = \left(\frac{\partial \mu_c^i}{\partial s^b} - \frac{\partial \mu_b^i}{\partial s^c}\right)\lambda_i^a \frac{\partial}{\partial s^a}.$$

Deci

$$w_{bc}^a = \left(\frac{\partial \mu_c^i}{\partial s^b} - \frac{\partial \mu_b^i}{\partial s^c}\right)\lambda_i^a. \tag{7}$$

5. Identitățile Jacobi și identitățile fundamentale în calculul congruențelor. a) Considerăm operatorii

$$A = \frac{\partial}{\partial s^a}, \quad B = \frac{\partial}{\partial s^b}, \quad C = \frac{\partial}{\partial s^c} \tag{1}$$

corespunzători la trei congruențe dintr-un sistem. Formăm paranteza

$$(CAB) = [C(AB)] = C(AB) - (AB)C =$$

$$= \frac{\partial}{\partial s^c}\left(\frac{\partial^2}{\partial s^a \partial s^b} - \frac{\partial^2}{\partial s^b \partial s^a}\right) - \left(\frac{\partial^2}{\partial s^a \partial s^b} - \frac{\partial^2}{\partial s^b \partial s^a}\right)\frac{\partial}{\partial s^c}.$$

Notăm

$$(abc) = \frac{\partial^3}{\partial s^a \partial s^b \partial s^c}. \tag{2}$$

Atunci

$$(CAB) = (cab) - (cba) - (abc) + (bac). \tag{3}$$

Prin permutarea indicilor, rezultă *identitatea Jacobi*

$$(ABC) + (BCA) + (CAB) = 0. \tag{4}$$

b) Avem pe de altă parte, revenind la notația $X_a = \frac{\partial}{\partial s^a}$,

(5) $$(X_b X_c) = w^a_{bc} \frac{\partial}{\partial s^a} = \frac{\partial^2}{\partial s^b \partial s^c} - \frac{\partial^2}{\partial s^c \partial s^b}.$$

Deci

$$(X_d X_b X_c) = \frac{\partial}{\partial s^d}\left(w^a_{bc}\frac{\partial}{\partial s^a}\right) - w^a_{bc}\frac{\partial}{\partial s^a}\left(\frac{\partial}{\partial s^d}\right) =$$

$$= \frac{\partial w^a_{bc}}{\partial s^d}\frac{\partial}{\partial s^a} + w^a_{bc}(X_d X_a) = \frac{\partial w^a_{bc}}{\partial s^d}\frac{\partial}{\partial s^a} + w^a_{bc} w^f_{da}\frac{\partial}{\partial s^f}.$$

În ultimul termen, schimbăm indicii de sumare a și f între ei; permutăm literele b, c, d între ele și folosim identitatea Poisson

$$(X_d X_b X_c) + (X_b X_c X_d) + (X_c X_d X_b) = 0.$$

Notăm cu $(abcd)$ coeficientul operatorului $X_a = \frac{\partial}{\partial s^a}$. Obținem *identitățile fundamentale* în calculul congruențelor

(6) $$(abcd) = \frac{\partial w^a_{bc}}{\partial s^d} + \frac{\partial w^a_{cb}}{\partial s^b} + \frac{\partial w^a_{db}}{\partial s^c} + w^a_{bf} w^f_{cd} + w^a_{cf} w^f_{db} + w^a_{df} w^f_{bc} = 0.$$

6. Covariant biliniar. a) Fie

(1) $$ds^a = \lambda^a_i dx^i$$

o formă Pfaff. Numim *covariant biliniar* al formei expresia

(2) $$\Delta s^a = \delta ds^a - d\delta s^a,$$

d și δ fiind două simboluri de diferențiere. Avem

(3) $$\Delta s^a = \delta(\lambda^a_i dx^i) - d(\lambda^a_i \delta x^i) = \left(\frac{\partial \lambda^a_i}{\partial x^j} - \frac{\partial \lambda^a_j}{\partial x^i}\right) dx^i \delta x^j.$$

b) Pe de altă parte am stabilit relația

(4) $$(X_b X_c) = w^a_{bc} X_a,$$

unde

(5) $$w^a_{bc} = \left(\frac{\partial \mu^i_c}{\partial s^b} - \frac{\partial \mu^i_b}{\partial s^c}\right)\lambda^a_i.$$

Apropiem aceste rezultate în modul următor. Din relația $\mu^i_c \lambda^a_i = \delta^a_c$ rezultă

$$\frac{\partial \mu^i_c}{\partial s^b}\lambda^a_i = -\mu^i_c \frac{\partial \lambda^a_i}{\partial s^b} = -\mu^i_c \frac{\partial \lambda^a_i}{\partial x^j}\frac{\partial x^j}{\partial s^b} = -\mu^i_c \mu^j_b \frac{\partial \lambda^a_i}{\partial x^j} = -\mu^i_b \mu^j_c \frac{\partial \lambda^a_j}{\partial x^i};$$

deci

(6) $$w^a_{bc} = \left(\frac{\partial \lambda^a_i}{\partial x^j} - \frac{\partial \lambda^a_j}{\partial x^i}\right)\mu^i_b \mu^j_c.$$

Deoarece $dx^i = \mu^i_b ds^b$, $\delta x^j = \mu^j_c \delta s^c$, rezultă din (3) coeficienții covariantului biliniar sub o formă simplă

(7) $$\Delta s^a = w^a_{bc} ds^b \delta s^c.$$

Cînd covariantul biliniar este nul, avem din (6)

$$\frac{\partial \lambda^a_i}{\partial x^j} = \frac{\partial \lambda^a_j}{\partial x^i}$$

adică, după (1), ds^a este o diferențială totală exactă.

7. Transformări de congruențe. Formulele fundamentale în calculul congruențelor. a) Considerăm în spațiul X_n un sistem de n congruențe independente

(1) $$\frac{dx^1}{\mu^1_a} = \frac{dx^2}{\mu^2_a} = \ldots = \frac{dx^n}{\mu^n_a}, \quad (a = 1, 2, \ldots, n),$$

cu operatorii corespunzători

(2) $$X_a = \frac{\partial}{\partial s^a} = \mu^i_a \frac{\partial}{\partial x^i}$$

şi formele Pfaff asociate

(3) $$ds^a = \lambda_i^a dx^i, \quad dx^i = \mu_a^i ds^a.$$

Operatorii şi formele considerate sînt independente şi în număr maxim. Orice alt operator şi orice altă formă se exprimă linear în funcţie de X_a, respectiv ds^a $(a = 1, 2, \ldots, n)$. Fie

(4) $$ds = p_i dx^i$$

o formă arbitrară; avem

(5) $$ds = p_i \mu_a^i ds^a = p_a ds^a,$$

p_a fiind proiecţiile vectorului p_i, pe congruenţele date.

b) Considerăm acum un alt sistem de congruenţe independente, cărora le corespund formele

(6) $$ds'^a = \lambda_i'^a dx^i;$$

atunci $ds'^a = \lambda_i'^a \mu_b^i ds^b$. Punînd

(7) $$c_b^a = \lambda_i'^a \mu_b^i,$$

sau

(8) $$\lambda_i'^a = c_b^a \lambda_i^b, \quad \mu_b^i = c_b^a \mu_a'^i,$$

putem să scriem formulele de transformare sub forma

(9) $$ds'^a = c_b^a ds^b.$$

În mod analog, însemnînd prin $\mu_a'^i$ minorii normaţi ai elementelor $\lambda_i'^a$ în determinantul $|\lambda_i'^a|$, operatorii lineari X_a devin

$$X_a' = \frac{\partial}{\partial s'^a} = \mu_a'^i \frac{\partial}{\partial x^i};$$

dar

$$\frac{\partial}{\partial s^a} = \frac{\partial}{\partial s'^b} \frac{\partial s'^b}{\partial s^a} = \frac{\partial}{\partial s'^b} c_a^b;$$

deci

(10) $$X_a = c_a^b X_b'.$$

c) Covariantul bilinear al formei (9) este

$$\Delta s'^a = \delta ds'^a - d\delta s'^a = \delta(c_b^a ds^b) - d(c_b^a \delta s^b) =$$

$$= \frac{\partial c_b^a}{\partial s^c} \delta s^c ds^b + c_b^a \delta ds^b - \frac{\partial c_b^a}{\partial s^c} ds^c \delta s^b - c_b^a d\delta s^b;$$

sau

(11) $$\Delta s'^a = \left(\frac{\partial c_b^a}{\partial s^c} - \frac{\partial c_c^a}{\partial s^b}\right) ds^b \delta s^c + c_b^a \Delta s^b.$$

Deoarece $\Delta s^a = w_{bc}^a ds^b \delta s^c$, avem

$$\Delta s'^a = w_{kl}'^a ds'^k \delta s'^l = w_{kl}'^a c_b^k c_c^l ds^b \delta s^c.$$

Rezultă *formulele fundamentale* în calculul cu congruenţe

(12) $$w_{kl}'^a c_b^k c_c^l = w_{bc}^h c_h^a + \frac{\partial c_b^a}{\partial s^c} - \frac{\partial c_c^a}{\partial s^b}.$$

8. Congruenţe în V_n. a) Considerăm spaţiul riemannian V_n, de metrică

(1) $$ds^2 = a_{ij} dx^i dx^j$$

şi un sistem de n congruenţe independente, de parametri μ_a^i şi momente λ_i^a:

(2) $$ds^a = \lambda_i^a dx^i, \quad dx^i = \mu_a^i ds^a.$$

Putem să scriem metrica spaţiului sub forma

$$ds^2 = a_{ij} dx^i dx^j = a_{ij} \mu_a^i \mu_b^j ds^a ds^b$$

sau

(3) $$ds^2 = \alpha_{ab} ds^a ds^b,$$

unde

(4) $$\alpha_{ab} = a_{ij} \mu_a^i \mu_b^j,$$

deci şi invers,

(5) $$a_{ij} = \alpha_{ab}\lambda_i^a\lambda_j^b.$$

Coeficienţii α_{ab} sînt proiecţiile tensorului fundamental a_{ij} pe congruenţele (λ). Pătratul lungimii vectorului μ^i în metrica (1), fiind $\mu^2 = a_{ij}\mu^i\mu^j$, rezultă că α_{aa} este pătratul lungimii vectorului μ_a^i. Unghiul θ al direcţiilor de parametri μ_a^i, μ_b^i este dat de

(6) $$\cos\theta = \frac{a_{ij}\mu_a^i\mu_b^j}{\sqrt{a_{ij}\mu_a^i\mu_a^j}\,\sqrt{a_{ij}\mu_b^i\mu_b^j}} = \frac{\alpha_{ab}}{\sqrt{\alpha_{aa}\alpha_{bb}}},$$

a şi b fiind indici de numărătoare (nu sumăm în raport cu ei).

În particular, două congruenţe sînt ortogonale, cînd

(7) $$\alpha_{ab} = 0.$$

b) Presupunem vectorii μ_a^i unitari şi ortogonali; avem atunci

(8) $$a_{ij}\mu_a^i\mu_b^j = \delta_b^a,$$

sau

(9) $$\lambda_i^a = a_{ij}\mu_a^j.$$

Deci într-un sistem de congruenţe ortogonale în spaţiul V_n, momentele λ_i^a sînt componentele covariante ale parametrilor μ_a^i.

Într-un sistem de congruenţe ortogonale

$$\alpha_{ab} = \delta_b^a$$

şi metrica (3) a spaţiului devine

(10) $$ds^2 = (ds^1)^2 + (ds^2)^2 + \ldots + (ds^n)^2,$$

iar (5) devine

(11) $$a_{ij} = \lambda_i^a\lambda_j^a, \quad a^{ij} = \mu_a^i\mu_a^j.$$

Unui sistem de n congruenţe ortogonale putem să-i ataşăm astfel un spaţiu Riemann, de metrică (10), sub formă canonică. Această formă este păstrată de transformările de congruenţe

$$ds'^a = c_b^a\, ds^b,$$

pentru care

(12) $$c_b^a c_c^a = \delta_{bc}.$$

c) Asociem spaţiului V_n, definit de metrica (1), o conexiune afină, simetrică, luînd coeficienţii ei, egali cu simbolurile Christoffel de a doua speţă, ai metricii spaţiului, cu semn schimbat

$$\Gamma_{jk}^i = -\left(\begin{matrix} i \\ j\;\;k \end{matrix}\right);$$

atunci componentele acestei conexiuni pe un sistem de n congruenţe independente (λ) sînt

(13) $$\gamma_{bc}^a = \left[\frac{\partial\lambda_i^a}{\partial x^k} - \left(\begin{matrix} s \\ l\;\;k \end{matrix}\right)\lambda_s^a\right]\mu_b^l\mu_c^k;$$

deoarece

$$\left(\begin{matrix} s \\ l\;\;k \end{matrix}\right) = \left(\begin{matrix} s \\ k\;\;l \end{matrix}\right),$$

avem

(14) $$\gamma_{bc}^a - \gamma_{cb}^a = \left(\frac{\partial\lambda_i^a}{\partial x^k} - \frac{\partial\lambda_k^a}{\partial x^i}\right)\mu_b^i\mu_c^k = w_{bc}^a,$$

w_{bc}^a fiind coeficienţii covariantului bilinear al formei ds^a, anume

$$\Delta s^a = w_{bc}^a\, ds^b\delta s^c.$$

9. Componentele pe congruenţe, ale conexiunii afine. a) Legătura dintre calculul diferenţial absolut al coordonatelor şi al congruenţelor este dată de

(1) $$ds^a = \lambda_i^a dx^i$$

şi invers

(2) $$dx^i = \mu_a^i ds^a.$$

Un tensor U_{jk}^i, dat în sistemul de coordonate, are proiecţiile u_{bc}^a pe congruenţe, legate prin

(3) $$u_{bc}^a = U_{jk}^i\lambda_i^a\mu_b^j\mu_c^k$$

şi invers. Rezultă de aici următoarea dualitate: *din orice relaţie între x, s; λ, μ; u, U obţinem o nouă relaţie permutînd literele din aceeaşi pereche.* Este preferabil să permutăm şi indicii i, a etc. Astfel, în transformarea de coordonate

$$(4) \qquad x'^i = x'^i(x^1, x^2, \ldots, x^n),$$

componentele u^a_{bc} ale tensorului în sistemul de congruenţe sînt invariante, conform cu (3), deoarece U este tensor iar λ, μ vectori, a căror natură este indicată de poziţia indicilor.

Reciproc, într-o schimbare de congruenţe

$$(5) \qquad ds'^a = c^a_b \, ds^b,$$

componentele U^i_{jk} sînt invariante.

b) Considerăm un spaţiu cu conexiune afină, de coeficienţi Γ^i_{jk} şi fie γ^a_{bc} proiecţiile lor pe congruenţe. Considerăm tensorul

$$V^i_{,k} = \frac{\partial V^i}{\partial x^k} - \Gamma^i_{jk} V^j;$$

avem prin proiecţie în sistemul de congruenţe

$$(6) \qquad v^a_{,b} = \frac{\partial v^a}{\partial s^b} - \gamma^a_{cb} v^c;$$

dar, din formulele de proiecţie

$$v^a_{,b} = V^i_{,k}\lambda^a_i\mu^k_b = \left(\frac{\partial V^i}{\partial x^k} - \Gamma^i_{jk}V^j\right)\lambda^a_i\mu^k_b = \left(\frac{\partial v^c\mu^i_c}{\partial x^k} - \Gamma^i_{jk}v^c\mu^j_c\right)\lambda^a_i\mu^k_b =$$

$$= \frac{\partial v^c}{\partial x^k}\delta^a_c\mu^k_b + v^c\frac{\partial \mu^i_c}{\partial x^k}\lambda^a_i\mu^k_b - \Gamma^i_{jk}v^c\lambda^a_i\mu^j_c\mu^k_b =$$

$$= \frac{\partial v^a}{\partial x^k}\mu^k_b + v^c\left(-\mu^i_c\frac{\partial \lambda^a_i}{\partial x^k}\right)\mu^k_b - \Gamma^j_{ik}v^c\lambda^a_j\mu^i_c\mu^k_b =$$

$$= \frac{\partial v^a}{\partial s^b} - v^c\left(\frac{\partial \lambda^a_i}{\partial x^k} + \Gamma^j_{ik}\lambda^a_j\right)\mu^k_b\mu^i_c.$$

Comparînd cu (6) rezultă componentele conexiunii proiectate în sistemul de congruenţe

$$(7) \qquad \gamma^a_{bc} = \left(\frac{\partial \lambda^a_i}{\partial x^k} + \Gamma^j_{ik}\lambda^a_j\right)\mu^i_b\mu^k_c.$$

Dacă $\lambda^a_i = \delta^a_i$, avem $ds^a = dx^a$ şi sistemul de congruenţe coincide cu sistemul de coordonate, iar

$$\gamma^a_{bc} \to \Gamma^a_{bc}.$$

Aplicînd din nou principiul dualităţii, inversăm relaţiile (7) sub forma

$$(8) \qquad \Gamma^i_{jk} = \left(\frac{\partial \mu^i_a}{\partial s^b} + \gamma^c_{ab}\mu^i_c\right)\lambda^a_j\lambda^b_k.$$

c) Considerăm relaţia de transformare a coeficienţilor unei conexiuni afine

$$(9) \qquad \frac{\partial^2 x'^i}{\partial x^j \partial x^k} = \Gamma'^i_{rs}\frac{\partial x'^r}{\partial x^j}\frac{\partial x'^s}{\partial x^k} - \Gamma^r_{jk}\frac{\partial x'^i}{\partial x^r}.$$

Aplicăm acelaşi principiu de dualitate $x \to s$, $\Gamma \to \gamma$, $i \to a$, $j \to b$, $k \to c$ şi ţinem seama de (5);

$$\frac{\partial x'^i}{\partial x^j} \to \frac{\partial s'^a}{\partial s^b} = c^a_b.$$

Rezultă că într-o transformare de congruenţe $ds'^a = c^a_b \, ds^b$ coeficienţii conexiunii γ^a_{bc} suferă transformarea

$$(10) \qquad \frac{\partial c^a_b}{\partial s^c} = \gamma'^a_{ef}c^e_b c^f_c - \gamma^f_{bc}c^a_f.$$

10. Aplicaţii. a) *Să se aducă vectorul (x, y, z) la forma canonică.*
Avem $a^1 = x$, $a^2 = y$, $a^3 = z$. Scriem ecuaţiile congruenţei de curbe

$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y} = \frac{dz}{z},$$

deci $y = C_1 x$, $z = C_2 x$. Luăm $x' = C_1$, $y' = C_2$. Transformarea căutată este deci

$$x' = \frac{y}{x}, \quad y' = \frac{z}{x}$$

şi z' arbitrar.

În adevăr noile componente ale vectorului (x, y, z), conform formulei de transformare

$$V'^i = V^j \frac{\partial x'^i}{\partial x^j}$$

sînt

$$V'^1 = V^1 \frac{\partial x'}{\partial x} + V^2 \frac{\partial x'}{\partial y} + V^3 \frac{\partial x'}{\partial z} = 0,$$

$$V'^2 = V^1 \frac{\partial y'}{\partial x} + V^2 \frac{\partial y'}{\partial y} + V^3 \frac{\partial y'}{\partial z} = 0.$$

Putem să-l alegem pe $z' = z'(x, y, z)$ astfel ca $V'^3 = 1$. De exemplu, luînd pe z' funcție numai de z, trebuie ca

$$V'^3 = V^3 \frac{\partial z'}{\partial z} = z \frac{\partial z'}{\partial z} = 1.$$

Este suficient să luăm $z' = \log z$.

b) *Să se studieze în plan, congruența dreptelor ce trec prin origine și congruența cercurilor cu centrul în origine. Să se verifice formulele generale în cazul sistemului acestor două congruențe.*

1. Considerăm familia de drepte ce trec prin origine

$$y = C_1 x$$

și familia de cercuri cu centrul în origine

$$x^2 + y^2 = C_2.$$

Ele formează două congruențe de curbe (fig. 5). Ecuațiile lor diferențiale sînt

$$y\,dx - x\,dy = 0, \quad x\,dx + y\,dy = 0,$$

sau, punînd în evidență parametrii μ_a^i

$$(1) \qquad \frac{dx}{x} = \frac{dy}{y}, \quad \mu_1^1 = \frac{x}{r}, \quad \mu_1^2 = \frac{y}{r},$$

$$(2) \qquad \frac{dx}{-y} = \frac{dy}{x}, \quad \mu_2^1 = -\frac{y}{r}, \quad \mu_2^2 = \frac{x}{r},$$

$$r^2 = x^2 + y^2.$$

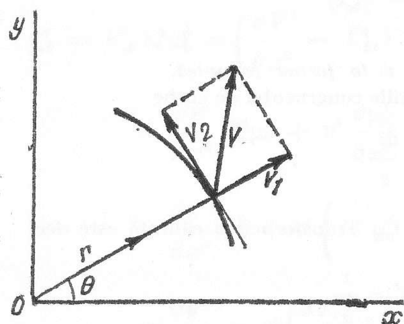


Fig. 5

Avem

$$(3) \qquad \mu = \begin{vmatrix} \mu_1^1 & \mu_1^2 \\ \mu_2^1 & \mu_2^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{x}{r} & \frac{y}{r} \\ -\frac{y}{r} & \frac{x}{r} \end{vmatrix} = 1,$$

$$\lambda_1^1 = \frac{x}{r}, \quad \lambda_1^2 = -\frac{y}{r}, \quad \lambda_2^1 = \frac{y}{r}, \quad \lambda_2^2 = \frac{x}{r}.$$

Determinăm arcele pe congruențe, cu formula

$$ds^a = \lambda_i^a dx^i;$$

vem

$$(4) \qquad \begin{aligned} ds^1 &= \lambda_1^1\,dx + \lambda_2^1\,dy = dr, \\ ds^2 &= \lambda_1^2\,dx + \lambda_2^2\,dy = r\,d\theta, \end{aligned}$$

în coordonate polare $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$. Formulele la care am ajuns sînt, dealtfel evidente.

Proiecțiile unui vector V pe congruențe sînt

$$v^a = \lambda_i^a V^i,$$

deci

$$v^1 = \lambda_1^1 V^1 + \lambda_2^1 V^2 = \frac{x}{r} V^1 + \frac{y}{r} V^2,$$

$$v^2 = -\frac{y}{r} V^1 + \frac{x}{r} V^2.$$

Dealtfel, scriind vectorul sub forma

$$V = V^1 I_1 + V^2 I_2,$$

unde I_1, I_2 sînt versorii axelor Ox, Oy și înmulțind scalar cu versorii R și T ai direcțiilor razei și tangentei la cerc, regăsim rezultatele.

2. Operatorii sînt dați de

$$X_a = \frac{\partial}{\partial s^a},$$

deci

(5) $$X_1 = \frac{\partial}{\partial r}, \quad X_2 = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \theta}.$$

Rezultă

$$X_1(r) = 1, \quad X_2(r) = 0, \quad X_1(\theta) = 0, \quad X_2(\theta) = \frac{1}{r}.$$

Verificăm simplu, formula

(6) $$(X_1 \, X_2) f = \frac{\partial^2 f}{\partial s^1 \partial s^2} - \frac{\partial^2 f}{\partial s^2 \partial s^1} = -\frac{1}{r^2}\frac{\partial f}{\partial \theta}.$$

În adevăr

$$\frac{\partial f}{\partial s^1} = \frac{\partial f}{\partial r}, \quad \frac{\partial f}{\partial s^2} = \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \theta}.$$

Să verificăm formulele

$$(X_b X_c) = w^a_{bc} X_a.$$

Avem

$$(X_1 X_2) = \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \theta}\right) - \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\frac{\partial}{\partial r}\right) = -\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial \theta} = -\frac{1}{r} X_2$$

deci

(7) $$w^1_{12} = 0, \quad w^2_{12} = -\frac{1}{r}.$$

3. Să verificăm formulele

$$w^a_{bc} = \left(\frac{\partial \mu^i_c}{\partial s^b} - \frac{\partial \mu^i_b}{\partial s^c}\right)\lambda^a_i.$$

Punem mai simplu,

(8) $$\mu^1_1 = \cos\theta, \quad \mu^2_1 = \sin\theta, \quad \mu^1_2 = -\sin\theta, \quad \mu^2_2 = \cos\theta,$$
$$\lambda^1_1 = \cos\theta, \quad \lambda^2_1 = -\sin\theta, \quad \lambda^1_2 = \sin\theta, \quad \lambda^2_2 = \cos\theta.$$

Atunci

$$w^1_{12} = \left(\frac{\partial \mu^1_2}{\partial s^1} - \frac{\partial \mu^1_1}{\partial s^2}\right)\lambda^1_1 + \left(\frac{\partial \mu^2_2}{\partial s^1} - \frac{\partial \mu^2_1}{\partial s^2}\right)\lambda^1_2 = \frac{1}{r}\sin\theta\cos\theta - \frac{1}{r}\cos\theta\sin\theta = 0,$$

$$w^2_{12} = \left(\frac{1}{r}\sin\theta\right)\lambda^2_1 + \left(-\frac{1}{r}\cos\theta\right)\lambda^2_2 = -\frac{1}{r}.$$

Covarianţii bilineari sînt

(9) $$\Delta s^1 = \delta \mathrm{d}r - \mathrm{d}\delta r = 0,$$
$$\Delta s^2 = \delta(r\,\mathrm{d}\theta) - \mathrm{d}(r\delta\theta) = \delta r \mathrm{d}\theta - \mathrm{d}r\,\delta\theta.$$

Să verificăm formulele

$$\Delta s^a = w^a_{bc}\,\mathrm{d}s^b \delta s^c.$$

Avem

$$\Delta s^1 = w^1_{12}(\mathrm{d}s^1\delta s^2 - \mathrm{d}s^2\delta s^1) = 0,$$

$$\Delta s^2 = w^2_{12}(\mathrm{d}s^1\delta s^2 - \mathrm{d}s^2\delta s^1) =$$

$$= -\frac{1}{r}(r\,\mathrm{d}r\,\delta\theta - r\,\mathrm{d}\theta\,\delta r) = \delta r\,\mathrm{d}\theta - \mathrm{d}r\,\delta\theta.$$

De asemenea verificăm simplu identităţile fundamentale.

E. GRUPURI CONTINUE

1. Grup continuu cu un parametru. a) În spaţiul X_n considerăm o familie de transformări, de forma

(1) $$y^i = f^i(x^1, x^2, \ldots, y^n, a) = f^i(x, a),$$

unde $i = 1, 2, \ldots, n$ şi a este un parametru. Notăm cu S_a transformarea corespunzătoare valorii a a parametrului. Dîndu-se o altă transformare S_b

(2) $$z^i = f^i(y^1, y^2, \ldots, y^n, b),$$

numim *produsul transformărilor* S_a, S_b, transformarea

(3) $$z^i = f^i[f^1(x, a), f^2(x, a), \ldots, f^n(x, a), b].$$

Presupunem că familia (1) conține transformarea identică, dec există o valoare a parametrului a, pentru care (1) devine $y^i = x^i$i Putem atunci, printr-o schimbare de parametru, să obținem transformarea identică pentru $a = 0$.

Spunem că transformările (1) formează un *grup cu un parametru*, dacă conțin transformarea identică și dacă produsul $S_a\, S_b$ este de asemenea o transformare (1), oricare ar fi a, b, deci dacă

(4) $$f^i(y^1, y^2, \ldots, y^n, b) = f^i(x^1, x^2, \ldots, x^n, c).$$

b) Dezvoltăm în serie pe y^i, după puterile lui a

(5) $$y^i = f^i(x, a) = x^i + a\xi^i + \frac{a^2}{2}\xi^i_2 + \ldots + \frac{a^p}{p!}\xi^i_p + \ldots,$$

ξ^i, ξ^i_2, ... fiind funcții de $x^1, x^2, \ldots, x^n$.

Dacă operăm în X_n o transformare de variabile

(6) $$x'^i = \varphi^i(x^1, x^2, \ldots, x^n),$$

y^i suferă aceeași transformare

(6′) $$y'^i = \varphi^i(y^1, y^2, \ldots, y^n),$$

și formulele (5) devin

(5′) $$y'^i = x'^i + a\xi'^i + \frac{a^2}{2}\xi'^i_2 + \ldots$$

Din (5) rezultă

(7) $$\xi^i = \left(\frac{\partial y^i}{\partial a}\right)_0,$$

notînd astfel valoarea pentru $a = 0$, cînd y^i devin x^i. Avem

(8) $$\xi'^i = \left(\frac{\partial y'^i}{\partial a}\right)_0 = \left(\frac{\partial y'^i}{\partial y^j}\right)_0 \left(\frac{\partial y^j}{\partial a}\right)_0 = \frac{\partial x'^i}{\partial x^j}\xi^j;$$

deci ξ^i *sînt componentele unui vector contravariant.*

2. Transformare infinitezimală. a) Fie o familie de transformări cu un parametru

(1) $$y^i = f^i(x^1, x^2, \ldots, x^n, a).$$

care posedă pentru $a = 0$ transformarea identică. Dezvoltăm după puterile lui a:

(2) $$y^i = x^i + a\xi^i + \frac{a^2}{2}\xi^i_2 + \ldots,$$

ξ^i, ξ^i_2, ... fiind funcții de $x^1, x^2, \ldots, x^n$. Ținînd seama numai de termenii de primul ordin, obținem *transformarea infinitezimală*

(3) $$y^i = x^i + a\xi^i$$

a familiei (1).

Dacă transformările (1) formează un grup, adică

(4) $$f^i(y, b) = f^i(x, c),$$

vom arăta că *putem să determinăm toți coeficienții* ξ^i_k din (2), *în funcție de* ξ^i.

b) În adevăr, avem din (4) și (2)

$$y^i + b\xi^i(y) + \frac{b^2}{2}\xi^i_2(y) + \ldots = x^i + c\xi^i(x) + \frac{c^2}{2}\xi^i_2(x) + \ldots$$

și ținînd din nou seama de (2),

(5) $$x^i + a\xi^i + \frac{a^2}{2}\xi^i_2 + \ldots + b\left(\xi^i + a\frac{\partial \xi^i}{\partial x^j}\xi^j + \ldots\right) +$$

$$+ \frac{b^2}{2}(\xi^i_2 + \ldots) + \ldots = x^i + c\xi^i + \frac{c^2}{2}\xi^i_2 + \ldots$$

ξ^i, ξ^i_2, ... fiind aici funcții numai de x. Termenii nescriși sînt de al treilea ordin în a, b, c.

5 – c. 1767

Termenii din paranteză au provenit din formula Taylor

$$f(y) = f(x^1 + h^1,\ x^2 + h^2,\ \ldots,\ x^n + h^n) =$$
$$= f(x^1, x^2, \ldots, x^n) + h^j \frac{\partial f}{\partial x^j} + \cdots,$$

unde

$$f(x) = \xi^i(x),\quad h^i = a\xi^i.$$

Revenim la (5) şi punem

$$c = a + b + Aa^2 + Bab + Cb^2 + \ldots;$$

anulînd termenii de al doilea ordin în (5), obţinem

$$\frac{a^2}{2}\xi^i_2 + ab\frac{\partial \xi^i}{\partial x^j}\xi^j + \frac{b^2}{2}\xi^i_2 =$$
$$= (Aa^2 + Bab + Cb^2)\xi^i + \frac{(a+b)^2}{2}\xi^i_2,$$

deci

(7) $$A = C = 0,\quad \frac{\partial \xi^i}{\partial x^j}\xi^j - B\xi^i = \xi^i_2.$$

Rezultă că ξ^i_2 se exprimă în ξ^i, B fiind o constantă. Analog, considerînd termenii de ordinul al treilea în (5), obţinem pe ξ^i_3 în funcţie de ξ^i etc.

Deci *grupul este complet determinat de transformarea sa infinitezimală.*

c) Deoarece ξ^i sînt componentele unui vector contravariant, formăm operatorul

(8) $$X = \xi^i \frac{\partial}{\partial x^i}.$$

O funcţie $f(x^1, x^2, \ldots, x^n)$ este *invariantă* în raport cu grupul (1), dacă

(9) $$f(y^1, y^2, \ldots, y^n) = f(x^1, x^2, \ldots, x^n).$$

Înlocuim pe y prin valorile (3), ţinînd seama că

$$f(x^1 + h^1, \ldots, x^n + h^n) = f(x^1, \ldots, x^n) + \frac{\partial f}{\partial x^i} h^i + \ldots,$$

cu $h^i = a\,\xi^i$; obţinem

(10) $$aX(f) + \ldots = 0,$$

termenii nescrişi fiind de ordinul al doilea în a. Deci *funcţia f este invariantă în grup,* dacă

(11) $$X(f) = \xi^i \frac{\partial f}{\partial x^i} = 0.$$

3. Ecuaţiile diferenţiale ale grupului cu un parametru. a) Considerăm transformările S_a,

(1) $$y^i = f^i(x^1, x^2, \ldots, x^n, a)$$

şi fie S_b

(2) $$z^i = f^i(y^1, y^2, \ldots, y^n, b).$$

În ipoteza că transformările formează un grup, avem

(3) $$f^i(y, b) = f^i(x, c),$$

unde c depinde de a, b:

(4) $$c = \varphi(a, b).$$

Rezultă că variabilele x, y, a, b, c nu sînt toate independente. Alegem ca variabile independente pe x, a şi c. Derivăm relaţia (3) în raport cu a; obţinem

(5) $$\frac{\partial f^i}{\partial y^j}\frac{\partial y^j}{\partial a} + \frac{\partial f^i}{\partial b}\frac{\partial b}{\partial a} = 0.$$

Avem un sistem de n ecuaţii lineare în $\frac{\partial y^l}{\partial a}$, de determinant $\left|\frac{\partial f^i}{\partial y^l}\right| \neq 0$. Rezolvînd, obţinem

(6) $$\frac{\partial y^i}{\partial a} = \Xi^i(y, b)\frac{\partial b}{\partial a}.$$

Eliminăm pe $\frac{\partial b}{\partial a}$ din (4), pe care o derivăm în raport cu a:

$$0 = \frac{\partial \varphi}{\partial a} + \frac{\partial \varphi}{\partial b}\frac{\partial b}{\partial a},$$

sau

(7) $$\frac{\partial b}{\partial a} = \Psi(a, b).$$

Deci

(8) $$\frac{\partial y^i}{\partial a} = \Xi^i(y, b)\Psi(a, b).$$

b) Acestea sînt ecuaţiile diferenţiale la care satisfac y, consideraţi ca funcţii de a; apar în aceste ecuaţii numai y, a, b; dar b nu apare în partea întîia, deci şi în partea a doua, el intervine numai aparent. Trebuie să înţelegem ecuaţiile (8) în sensul că în partea a doua a lor putem să dăm valori numerice particulare pentru b. Deci

(9) $$\frac{\partial y^i}{\partial a} = \xi^i(y)\ \psi(a).$$

Această relaţie are loc, oricare ar fi a; de exemplu, pentru $a = 0$, avem $\left(\frac{\partial y^i}{\partial a}\right)_0 = \xi^i$, iar $\psi(0)$ este o constantă arbitrară; deci ξ^i din ecuaţiile diferenţiale (9) este însuşi vectorul care determină transformarea infinitezimală

(10) $$y^i = x^i + a\xi^i.$$

c) Scriem sistemul (9) sub forma

$$dy^i = \frac{\partial y^i}{\partial a} da = \xi^i(y)\ \psi(a)\ da$$

sau

(11) $$\frac{dy^1}{\xi^1(y)} = \frac{dy^2}{\xi^2(y)} = \ldots = \frac{dy^n}{\xi^n(y)} = \psi(a)\ da = dt.$$

Cu ajutorul sistemului (11) de ecuaţii diferenţiale, cunoscînd transformarea infinitezimală, putem să determinăm prin integrare ecuaţiile grupului sub formă finită. Presupunem că vectorul contravariant ξ^i este redus la forma canonică $(0, 0, \ldots, 0, 1)$. Atunci sistemul (11) devine

(12) $$\frac{dy^1}{0} = \frac{dy^2}{0} = \ldots = \frac{dy^{n-1}}{0} = \frac{dy^n}{1} = dt,$$

deci, prin integrare,

(13) $$y^h = c^h,\quad y^n = c^n + t\ (h = 1, 2, \ldots, n-1).$$

Deci *grupurile cu un parametru sînt echivalente cu grupul translaţiilor.*

4. Grupuri continue cu mai mulţi parametri. Transformare infinitezimală. Produsul transformărilor. a) Considerăm în spaţiul X_n o familie de transformări

(1) $$y^i = f^i(x^1, \ldots, x^n;\ a^1, \ldots, a^r),$$

care depind de r parametri $a^1, a^2, \ldots, a^r$. Aceşti parametri sînt *esenţiali*, dacă nu putem să micşorăm numărul lor.

Presupunem funcţiile f^i analitice în raport cu parametrii a^i şi de asemenea că transformările (1) conţin transformarea identică; atunci putem să efectuăm o schimbare de parametri, astfel încît transformarea identică să corespundă pentru valorile nule ale parametrilor. Avem în acest caz:

(2) $$y^i = x^i + \xi^i_h a^h + \frac{1}{2}\ \xi^i_{hk} a^h a^k + \ldots$$

$(h, k = 1, 2, \ldots, r)$ iar ξ^i_h, ξ^{ik}_h fiind funcţii de $x^1, x^2, \ldots, x^n$. Putem să asociem familiei de transformări r vectori contravarianţi ξ^i_h, deci r operatori lineari

$$X_h = \xi^i_h \frac{\partial}{\partial x^i}. \tag{3}$$

Transformările

$$y^i = x^i + \xi^i_h a^h \tag{4}$$

sînt transformările infinitezimale ale grupului.

b) Scriem ecuaţiile (1) cu ajutorul altor parametri $A^k(a^1, \ldots, a^r)$

$$y^i = g^i(x^1, \ldots, x^n;\ A^1, \ldots, A^s); \tag{1'}$$

dacă $s < r$, parametrii a^h nu sînt esenţiali. Avem de asemenea

$$y^i = x^i + \eta^i_k A^k + \ldots \tag{2'}$$

şi fie

$$A^k = C^k_h a^h + \ldots \tag{5}$$

formule care exprimă constantele A în raport cu a, astfel ca ele să se anuleze în acelaşi timp; rezultă

$$\xi^i_h = C^k_h \eta^i_k, \tag{6}$$

adică cele nr funcţii ξ^i_h se exprimă linear, cu coeficienţi constanţi, cu ajutorul celor ns funcţii η^i_k. Dacă $r > s$, rezultă că funcţiile ξ^i_h (în număr mai mare decît η^i_k) nu sînt independente. Eliminînd pe η^i_k din acest sistem, obţinem relaţii lineare în ξ^i_h

$$\alpha^h \xi^i_h = 0, \tag{7}$$

cu coeficienţi α^h nu toţi nuli. Deci parametrii sînt esenţiali dacă operatorii X_h nu sînt legaţi prin nici o relaţie lineară, adică ecuaţia

$$\alpha^h X_h(f) \equiv \alpha^h \xi^i_h \frac{\partial f}{\partial x^i} = 0 \tag{8}$$

nu are nici o soluţie.

c) Notăm cu S_a transformarea (1) şi considerăm o nouă transformare S_b:

$$z^i = f^i(y^1, \ldots, y^n;\ b^1, \ldots, b^r). \tag{9}$$

Numim produs al transformărilor S_a, S_b, transformarea

$$z^i = f^i[f^1(x, a), \ldots, f^n(x, a);\ b^1, \ldots, b^r]. \tag{10}$$

Familia (1) constituie un grup continuu finit de transformări cu r parametri, G_r, dacă ea conţine transformarea identică şi dacă produsul $S_a S_b$ a două transformări din familie aparţine aceleiaşi familii, adică

$$f^i(y^1, \ldots, y^n;\ b^1, \ldots, b^r) = f^i(x^1, \ldots, x^n;\ c^1, \ldots, c^r), \tag{11}$$

unde parametrii c depind de a şi b:

$$c^h = \varphi^h(a^1, \ldots, a^r;\ b^1, \ldots, b^r). \tag{12}$$

d) Plecăm de la formulele (11), ţinînd seama de (4):

$$y^i + \xi^i_h(y)\, b^h + \frac{1}{2} \xi^i_{hk}(y)\, b^h b^k + \ldots =$$

$$= x^i + \xi^i_h(x)\, c^h + \frac{1}{2} \xi^i_{hk}(x)\, c^h c^k + \ldots;$$

folosim din nou relaţiile (4):

$$x^i + \xi^i_h a^h + \frac{1}{2} \xi^i_{hk} a^h a^k + \ldots + \xi^i_h b^h + \frac{\partial \xi^i_h}{\partial x^j} \xi^j_k a^k b^h + \ldots$$

(13)

$$\ldots + \frac{1}{2} \xi^i_{hk} b^h b^k + \ldots = x^i + \xi^i_h c^h + \frac{1}{2} \xi^i_{hk} c^h c^k + \ldots,$$

ξ^i fiind exprimaţi numai în x. Trebuie deci să avem

$$c^h = a^h + b^h + A^h_{kl} a^k a^l + B^h_{kl} b^k b^l + C^h_{kl} a^k b^l + \ldots \tag{14}$$

Dacă $b^h = 0$, S_b este transformarea de efect nul, dacă $y^i = z^i$, $S_c = S_a$, adică $c^h = a^h$; deci (14) nu trebuie să conțină termeni cu produse numai de a, adică $A = 0$; analog $B = 0$. Atunci

(15) $$c^h = a^h + b^h + C^h_{kl} a^k b^l + \dots$$

Schema produsului de transformări este indicată în fig. 6.

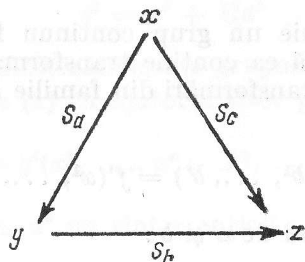


Fig. 6

5. Constantele de structură. a) Considerăm transformările S_a:

(1) $$y^i = x^i + \xi^i_h a^h + \frac{1}{2} \xi^i_{hk} a^h a^k + \dots$$

$(h, k = 1, 2, \dots, r)$ și transformarea S_b:

(2) $$z^i = y^i + \xi^i_h(y)\, b^h + \frac{1}{2} \xi^i_{hk}(y)\, b^h b^k + \dots$$

Transformările S_a formează un grup, dacă

(3) $$z^i = x^i + \xi^i_h(x)\, c^h + \frac{1}{2} \xi^i_{hk}(x)\, c^h c^k + \dots$$

În acest caz

(4) $$c^h = a^h + b^h + C^h_{kl} a^k b^l + \dots$$

Pe de altă parte, substituind în (2) relația (1) și identificînd cu (3), obținem

$$x^i + \xi^i_h a^h + \frac{1}{2} \xi^i_{hk} a^h a^k + \dots + \xi^i_h b^h + \frac{\partial \xi^i_h}{\partial x^j} \xi^j_k a^k b^h + \dots$$

(5) $$\dots + \frac{1}{2} \xi^i_{hk} b^h b^k + \dots = x^i + \xi^i_h (a^h + b^h + C^h_{kl} a^k b^l + \dots) +$$

$$+ \frac{1}{2} \xi^i_{hk} (a^h + b^h + \dots)(a^k + b^k + \dots) + \dots$$

Identificăm termenii de ordinul al doilea

$$\frac{\partial \xi^i_l}{\partial x^j} \xi^j_k a^k b^l = \xi^i_h C^h_{kl} a^k b^l + \frac{1}{2} \xi^i_{kl} (a^k b^l + a^l b^k).$$

Relația trebuie să aibă loc oricare ar fi a, b; deci

(6) $$\frac{\partial \xi^i_l}{\partial x^j} \xi^j_k = C^h_{kl} \xi^i_h + \xi^i_{kl}.$$

Schimbăm pe k cu l și scădem, ținînd seama că

$$\xi^i_{kl} = \xi^i_{lk};$$

obținem

(7) $$\frac{\partial \xi^i_l}{\partial x^j} \xi^j_k - \frac{\partial \xi^i_k}{\partial x^j} \xi^j_l = c^h_{kl} \xi^i_h.$$

unde

(8) $$c^h_{kl} = C^h_{kl} - C^h_{lk}.$$

Ținem seama de expresia parantezei Poisson, pentru operatorii

$$X_h = \xi^i_h \frac{\partial}{\partial x^i}.$$

Atunci (7) devine

(9) $$(X_k X_l) = c^h_{kl} X_h,$$

deci operatorii formează un sistem complet. Coeficienții c^h_{kl} sînt *constantele de structură* ale grupului.

b) Avem

$$(X_h X_k X_l) = [X_h(X_k X_l)] = [X_h,\ c^s_{kl} X_s] = c^s_{kl}(X_h X_s) = c^s_{kl} c^r_{hs} X_r .$$

Ţinem seama de identităţile Jacobi

$$(X_h X_k X_l) + (X_k X_l X_h) + (X_l X_h X_k) = 0.$$

Rezultă

(10) $$c^s_{kl}c^r_{hs} + c^s_{lh}c^r_{ks} + c^s_{hk}c^r_{ls} = 0.$$

Deci *dacă transformările* (1) *formează un grup* G_r *cu* r *parametri, sistemul de operatori este complet iar coeficienţii* c^h_{kl} *ai parantezelor Poisson sînt constanţi şi satisfac relaţiilor pătratice* (10).

Coeficienţii c^h_{kl} fiind strîmb simetrici în k, l, indicii k, l pot să ia $\frac{r(r-1)}{2}$ valori distincte iar h, valorile $1, 2, \ldots, r$. Avem deci cel mult $\frac{r^2(r-1)}{2}$ constante de structură.

c) La o schimbare de parametri $\bar{a}^h = c^h_k a^k$, avem

$$\xi^i_k = \left(\frac{\partial y^i}{\partial a^k}\right)_0 = \left(\frac{\partial y^i}{\partial \bar{a}^h}\right)_0 \left(\frac{\partial \bar{a}^h}{\partial a^k}\right)_0 = \bar{\xi}^i_h c^h_k,$$

deci

(11) $$X_k = \xi^i_k \frac{\partial}{\partial x^i} = c^h_k \bar{\xi}^i_h \frac{\partial}{\partial x^i} = c^h_k \bar{X}_h,$$

$$(X_k X_l) = c^r_{kl} X_r = c^r_{kl} c^i_r \bar{X}_i .$$

Rezultă că la o schimbare de parametri, constantele de structură se comportă tensorial:

(12) $$c^r_{kl} c^i_r = \bar{c}^i_{hj} c^h_k c^j_l .$$

6. Aplicaţii. a) *Considerăm transformările*

(1) $$x' = ax, \quad y' = \frac{y}{a}, \quad a \neq 0.$$

1. *Să se arate că acestea formează un grup.*
2. *Să se determine transformarea infinitezimală.*
3. *Să se determine funcţia invariantă.*
4. *Să se scrie ecuaţiile diferenţiale ale grupului.*

1. Fie

$$x'' = bx', \quad y'' = \frac{y'}{b}, \quad b \neq 0,$$

o altă transformare a familiei. Atunci

$$x'' = cx, \quad y'' = \frac{y}{c}, \quad c = ab \neq 0,$$

deci produsul a două transformări (1) este o transformare (1).
Transformarea identică corespunde pentru $a = 1$.

2. Înlocuim pe a prin $a + 1$. Transformările

(2) $$x' = (a+1)\,x, \quad y' = \frac{y}{a+1}$$

conţin transformarea identică pentru $a = 0$. Avem pentru $|a| < 1$,

$$\frac{1}{1+a} = 1 - a + a^2 - a^3 + \ldots$$

deci transformarea infinitezimală este

(3) $$x' = x + ax, \quad y' = y - ay.$$

3. Atunci

$$\xi^1 = x, \quad \xi^2 = -y$$

şi operatorul asociat

(4) $$X = x\frac{\partial f}{\partial x} - y\frac{\partial f}{\partial y}.$$

Funcţia $f(x, y)$ invariantă este soluţia ecuaţiei

$$x\frac{\partial f}{\partial x} - y\frac{\partial f}{\partial y} = 0.$$

deci

$$f(x, y) = xy,$$

ea ce se verifică imediat.

4. Ecuațiile diferențiale sînt

$$\frac{\partial y^i}{\partial a} = \xi^i_j(y)\, \varphi^j(a).$$

În cazul nostru

$$\frac{\partial x'}{\partial a} = x = \frac{x'}{1 + a}, \quad \frac{\partial y'}{\partial a} = - \frac{y}{(1 + a)^2} = - \frac{y'}{1 + a},$$

deci formulele sînt verificate cu

$$\varphi(a) = \frac{1}{1 + a}.$$

Invers, scriind ecuațiile diferențiale sub forma

$$\frac{dx'}{x'} = \frac{dy'}{-y'} = \frac{da}{1 + a}, \tag{5}$$

obținem

$$x' = C_1(1 + a), \quad y' = \frac{C_2}{1 + a},$$

C_1 și C_2 fiind funcții de x, y. Ținem seama că pentru $a = 0$, avem $x' = x$, $y' = y$; deci $C_1 = x$, $C_2 = y$. Regăsim ecuațiile (2) ale grupului.

b) *Considerăm familia de transformări*

$$y = \frac{x + a^1}{a^2 x + a^3}. \tag{6}$$

1. *Să se determine transformarea infinitezimală.*
2. *Să se scrie ecuațiile de structură ale grupului.*
3. *Să se formeze ecuațiile diferențiale.*
4. *Integrînd aceste ecuații, să se regăsească grupul (6).*

Transformările (6) formează, evident, un grup. Avem transformarea identică pentru $a^1 = a^2 = 0$, $a^3 = 1$. Schimbăm parametrii:

$$y = \frac{x + a^1}{a^2 x + a^3 + 1}. \tag{7}$$

Transformarea identică corespunde acum pentru $a^1 = a^2 = a^3 = 0$.

1. Avem

$$\frac{\partial y}{\partial a^1} = \frac{1}{a^2 x + a^3 + 1}, \quad \frac{\partial y}{\partial a^2} = - \frac{x(x + a^1)}{(a^2 x + a^3 + 1)^2},$$
$$\frac{\partial y}{\partial a^3} = - \frac{x + a^1}{(a^2 x + a^3 + 1)^2}; \tag{8}$$

deci

$$\xi_1 = \left(\frac{\partial y}{\partial a^1}\right)_0 = 1, \quad \xi_2 = \left(\frac{\partial y}{\partial a^2}\right)_0 = - x^2, \quad \xi_3 = \left(\frac{\partial y}{\partial a^3}\right)_0 = - x. \tag{9}$$

Transformarea infinitezimală devine

$$y = x + a^1 - x^2 a^2 - x a^3, \tag{10}$$

ceea ce putem să obținem și direct, dezvoltînd în serie, pentru a^2, a^3 mici:

$$\frac{x + a^1}{1 + a^2 x + a^3} = (x + a^1)(1 - a^2 x - a^3 + \ldots).$$

Deci

$$X_1 = \frac{\partial}{\partial x}, \quad X_2 = - x^2 \frac{\partial}{\partial x}, \quad X_3 = - x \frac{\partial}{\partial x}. \tag{11}$$

Operatorii sînt independenți, deci parametrii sînt esențiali.

2. Avem

$$(X_1 X_2) = X_1(X_2) - X_2(X_1) = \frac{\partial}{\partial x}\left(- x^2 \frac{\partial}{\partial x}\right) + x^2 \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) = - 2x \frac{\partial}{\partial x},$$

$$(X_2 X_3) = - x^2 \frac{\partial}{\partial x}\left(- x \frac{\partial}{\partial x}\right) + x \frac{\partial}{\partial x}\left(- x^2 \frac{\partial}{\partial x}\right) = - x^2 \frac{\partial}{\partial x},$$

$$(X_3 X_1) = - x \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) - \frac{\partial}{\partial x}\left(- x \frac{\partial}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial x}.$$

Ecuațiile de structură $(X_k X_l) = c^h_{kl} X_h$ sînt deci în cazul nostru

$$(X_1 X_2) = 2X_3, \quad (X_2 X_3) = X_2, \quad (X_3, X_1) = X_1. \tag{12}$$

Constantele de structură sînt

$$c^1_{12} = 0, \quad c^2_{12} = 0, \quad c^3_{12} = 2.$$
$$c^1_{23} = 0, \quad c^2_{23} = 1, \quad c^3_{23} = 0, \tag{13}$$
$$c^1_{31} = 1, \quad c^2_{31} = 0, \quad c^3_{31} = 0.$$

Verificăm, simplu, relațiile pătratice

$$c^s_{kl} c^r_{hs} + c^s_{lh} c^r_{ks} + c^s_{hk} c^r_{ls} = 0.$$

3. Notăm determinantul transformării

(14) $$1 + a^3 - a^1a^2 = d.$$

Eliminăm pe x din sistemul (8). Rezolvăm invers din (7)

(15) $$x = \frac{(1 + a^3)\,y - a^1}{-a^2y + 1},$$

adică o transformare de aceeași formă, cu parametrii

(16) $$(a^1)^{-1} = -\frac{a^1}{1 + a^3}, \quad (a^2)^{-1} = -\frac{a^2}{1 + a^3}, \quad (a^3)^{-1} = -\frac{a^3}{1 + a^3},$$

adică

$$x + a^1 = \frac{dy}{-a^2y + 1}, \quad a^2x + a^3 + 1 = \frac{x + a^1}{y} = \frac{d}{-a^2y + 1}.$$

Deci, din (8),

$$\frac{\partial y}{\partial a^1} = \frac{1 - a^2y}{d},$$

(17) $$\frac{\partial y}{\partial a^2} = -\frac{xy}{a^2x + a^3 + 1} = \frac{a^1y - (1 + a^3)y^2}{d},$$

$$\frac{\partial y}{\partial a^3} = -\frac{y}{a^2x + a^3 + 1} = -\frac{y + a^2y^2}{d}.$$

Rezultă că derivatele parțiale satisfac sistemul

$$\frac{\partial y}{\partial a^h} = \xi_j(y)\,\psi^j_h(a).$$

4. Scriem ecuațiile diferențiale (17) sub o formă mai simplă

$$d\frac{\partial y}{\partial a} = 1 - by,$$

(17') $$d\frac{\partial y}{\partial b} = ay - cy^2,$$

$$d\frac{\partial y}{\partial c} = -y - by^2,$$

punînd $a^1 = a$, $a^2 = b$, $1 + a^3 = c$, deci $d = c - ab$.

Ne propunem să obținem ecuațiile finite ale grupului. Din prima ecuație avem

$$(c - ab)\frac{\partial y}{\partial a} = 1 - by.$$

Derivînd în raport cu a, obținem

$$\frac{\partial^2 y}{\partial a^2} = 0,$$

deci y este linear în a. Înlocuim pe y prin $1/y$. Ecuația a doua din (17') devine

$$(c - ab)\frac{\partial y}{\partial b} = -ay + c;$$

prin derivare în raport cu b rezultă că $1/y$ este lineară în b și analog, din ultima ecuație rezultă că $1/y$ este lineară în c. Deci y este de forma

$$y = \frac{\alpha + \beta a}{\gamma + \delta b + \varepsilon c},$$

unde $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon$ sînt funcții de x. Avem

$$\frac{\partial y}{\partial a} = \frac{\beta}{\gamma + \delta b + \varepsilon c}$$

și identificînd cu prima ecuație din (17')

$$(c - ab)\,\beta = \gamma + \delta b + \varepsilon c - \alpha b - b\beta a,$$

rezultă $\beta = \varepsilon$, $\gamma = 0$, $\delta = \alpha$; punem $\beta = 1$; deci

$$y = \frac{\alpha + a}{\alpha b + c};$$

α este o funcție de x, pe care o înlocuim, simplu, chiar prin x.

F. COMPLETĂRI

1. Spațiu riemannian. a) 1. Considerăm un spațiu riemannian de metrică

(1) $$ds^2 = a_{ij}\,dx^i dx^j,$$

a_{ij} fiind componentele unui tensor covariant simetric de ordinul al doilea. Atunci forma ds^2 este invariantă la o transformare de coordonate

$$x'^i = x'^i(x^1, x^2, \ldots, x^n) \quad (i = 1, 2, \ldots, n). \tag{2}$$

Simbolurile Christoffel de prima speţă sînt introduse prin relaţia

$$(ijk) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial a_{jk}}{\partial x^i} + \frac{\partial a_{ik}}{\partial x^j} - \frac{\partial a_{ij}}{\partial x^k}\right), \tag{3}$$

iar cei de speţa a doua, prin

$$\left(\begin{array}{c} l \\ i \quad j \end{array}\right) = a^{lk}\,(ijk), \tag{4}$$

a^{lk} fiind minorii normaţi ai elementelor a_{lk} în $a = |a_{lk}|$.

Vrem să arătăm că la o schimbare de coordonate (2) simbolurile Christoffel de a doua speţă se modifică după formula

$$\frac{\partial^2 x'^i}{\partial x^j \partial x^k} = \left(\begin{array}{c} h \\ i \quad j \end{array}\right) \frac{\partial x'^i}{\partial x^h} - \left(\begin{array}{c} i \\ r \quad s \end{array}\right)' \frac{\partial x'^r}{\partial x^j}\frac{\partial x'^s}{\partial x^k}. \tag{5}$$

2. Vom demonstra în prealabil relaţia de transformare a simbolurilor Christoffel de prima speţă

$$(ijk)' = (rst)\frac{\partial x^r}{\partial x'^i}\frac{\partial x^s}{\partial x'^j}\frac{\partial x^t}{\partial x'^k} + a_{rs}\frac{\partial^2 x^r}{\partial x'^i \partial x'^j}\frac{\partial x^s}{\partial x'^k}. \tag{6}$$

La o transformare de coordonate, avem într-adevăr

$$a'_{ik} = a_{rs}\frac{\partial x^r}{\partial x'^i}\frac{\partial x^s}{\partial x'^k},$$

deci

$$\frac{\partial a'_{ik}}{\partial x'^j} = \frac{\partial a_{rs}}{\partial x^t}\frac{\partial x^r}{\partial x'^i}\frac{\partial x^s}{\partial x'^k}\frac{\partial x^t}{\partial x'^j} + a_{rs}\frac{\partial^2 x^r}{\partial x'^i \partial x'^j}\frac{\partial x^s}{\partial x'^k} + a_{rs}\frac{\partial x^r}{\partial x'^i}\frac{\partial^2 x^s}{\partial x'^k \partial x'^j}.$$

Prin permutările respective $i \leftrightarrow j$, $k \leftrightarrow j$ rezultă

$$2(ijk)' = \frac{\partial a'_{ik}}{\partial x'^j} + \frac{\partial a'_{jk}}{\partial x'^i} - \frac{\partial a'_{ij}}{\partial x'^k} = \frac{\partial x^r}{\partial x'^i}\frac{\partial x^s}{\partial x'^k}\frac{\partial x^t}{\partial x'^j}\left(\frac{\partial a_{rs}}{\partial x^t} + \frac{\partial a_{st}}{\partial x^r} - \frac{\partial a_{rt}}{\partial x^s}\right) + 2a_{rs}\frac{\partial^2 x^r}{\partial x'^i \partial x'^j}\frac{\partial x^s}{\partial x'^k},$$

adică relaţia (6).

3. Atunci

$$\left(\begin{array}{c} l \\ i \quad j \end{array}\right)' = a'^{kl}(ijk)' = a^{uv}(rst)\frac{\partial x^r}{\partial x'^i}\frac{\partial x^s}{\partial x'^j}\frac{\partial x^t}{\partial x'^k}\frac{\partial x'^k}{\partial x^u}\frac{\partial x'^l}{\partial x^v} + a^{uv}a_{rs}\frac{\partial x^s}{\partial x'^k}\frac{\partial^2 x^r}{\partial x'^i \partial x'^j}\frac{\partial x'^k}{\partial x^u}\frac{\partial x'^l}{\partial x^v};$$

dar $\frac{\partial x^t}{\partial x'^k}\frac{\partial x'^k}{\partial x^u} = \delta^t_u$, deci $u = t$ şi $a^{tv}(rst) = \left(\begin{array}{c} u \\ r \quad s \end{array}\right)$; analog $\frac{\partial x^s}{\partial x'^k}\frac{\partial x'^k}{\partial x^u} = \delta^s_u$, deci $s = u$ şi $a^{sv}a_{rs} = \delta^v_r$, deci $v = r$. Rezultă formula

$$\left(\begin{array}{c} l \\ i \quad j \end{array}\right)' = \left(\begin{array}{c} v \\ r \quad s \end{array}\right)\frac{\partial x^r}{\partial x'^i}\frac{\partial x^s}{\partial x'^k}\frac{\partial x'^l}{\partial x^v} + \frac{\partial^2 x^r}{\partial x'^i \partial x'^j}\frac{\partial x'^l}{\partial x^r}. \tag{7}$$

Înmulţim cu $\frac{\partial x^h}{\partial x'^l}$ şi sumăm în raport cu l; obţinem

$$\left(\begin{array}{c} l \\ i \quad j \end{array}\right)'\frac{\partial x^h}{\partial x'^l} = \left(\begin{array}{c} h \\ r \quad s \end{array}\right)\frac{\partial x^r}{\partial x'^i}\frac{\partial x^s}{\partial x'^k} + \frac{\partial^2 x^h}{\partial x'^i \partial x'^j}, \tag{8}$$

care este în fond relaţia (5) urmărită, schimbind literele l şi h între ele iar în restul formulei este indiferent că trecem de la coordonatele x^i la x'^i ca în (2) sau invers.

4. Dacă ţinem seama de formula de transformare a coeficienţilor conexiunii afine

$$\frac{\partial^2 x'^i}{\partial x^j \partial x^k} = \Gamma'^i_{rs}\frac{\partial x'^r}{\partial x^j}\frac{\partial x'^s}{\partial x^k} - \Gamma^h_{jk}\frac{\partial x'^i}{\partial x^h}, \tag{9}$$

confruntînd cu (5), rezultă că *simbolurile Christoffel de a doua speţă, luaţi cu semn schimbat, se transformă ca şi coeficienţii unei conexiuni afine*. Acesta este motivul pentru care am încadrat teoria spaţiilor riemanniene în teoria spaţiilor cu conexiune afină.

5. Cînd mărimile A^i_{jk}, funcţii de $x^1, x^2, \ldots, x^n$, la o transformare de coordonate se modifică după formula

$$A^i_{jk} = A'^r_{st}\frac{\partial x'^s}{\partial x^j}\frac{\partial x'^t}{\partial x^k}\frac{\partial x^i}{\partial x'^r} + \varphi^i_{jk}, \tag{10}$$

unde ultimul termen depinde numai de transformarea considerată, ca şi (7), spunem că A^i_{jk} sînt componentele unui *obiect geometric*. Un obiect geometric este o noţiune mai fină decît un tensor, la care se reduce pentru $\varphi = 0$. Rezultă că dacă A^i_{jk} este un obiect geometric, atunci $A^i_{jk} - A^i_{kj}$ este un tensor. Teoria este valabilă pentru obiecte geometrice cu oricîţi indici. În particular, coeficienţii unei conexiuni afine, ca şi simbolurile Christoffel de a doua speţă sînt obiecte geometrice.

b) 1. În spaţiul riemannian (1), componentele tensorului de curbură sînt date de simbolurile Riemann de a doua speţă, construite cu simbolurile Christoffel de a doua speţă

$$(11)\qquad R^i_{jkl} = \frac{\partial \begin{pmatrix} i \\ j \quad l \end{pmatrix}}{\partial x^k} - \frac{\partial \begin{pmatrix} i \\ j \quad k \end{pmatrix}}{\partial x^l} + \begin{pmatrix} i \\ s \quad k \end{pmatrix}\begin{pmatrix} s \\ j \quad l \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} i \\ s \quad l \end{pmatrix}\begin{pmatrix} s \\ j \quad k \end{pmatrix}$$

sau prin simbolurile Riemann de prima speţă

$$(12)\qquad R_{ijkl} = a_{hi} R^h_{jkl}.$$

Vom exprima direct simbolurile Riemann de prima speţă în raport cu tensorul fundamental sub forma

$$(13)\qquad R_{ijkl} = \frac{1}{2}\frac{\partial^2 a_{il}}{\partial x^j \partial x^k}\left(+ \frac{\partial^2 a_{jk}}{\partial x^i \partial x^l} - \frac{\partial^2 a_{jl}}{\partial x^i \partial x^k} - \frac{\partial^2 a_{ik}}{\partial x^j \partial x^l}\right) +$$

numită *formula Riemann-Christoffel*.

2. Avem, după (11) şi (12)

$$R_{ijkl} = a_{hi}\left[\frac{\partial \begin{pmatrix} h \\ j \quad l \end{pmatrix}}{\partial x^k} - \frac{\partial \begin{pmatrix} h \\ j \quad k \end{pmatrix}}{\partial x^l} + \begin{pmatrix} h \\ j \quad k \end{pmatrix}\begin{pmatrix} s \\ j \quad l \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} h \\ s \quad l \end{pmatrix}\begin{pmatrix} s \\ j \quad k \end{pmatrix}\right].$$

Dar

$$a_{hi}\left[\frac{\partial \begin{pmatrix} h \\ j \quad l \end{pmatrix}}{\partial x^k} + \begin{pmatrix} h \\ s \quad k \end{pmatrix}\begin{pmatrix} s \\ j \quad l \end{pmatrix}\right] = \frac{\partial a_{hi}\begin{pmatrix} h \\ j \quad l \end{pmatrix}}{\partial x^k} - \begin{pmatrix} s \\ j \quad l \end{pmatrix}\left[\frac{\partial a_{is}}{\partial x^k} - (jki)\right] =$$

$$= \frac{\partial a_{hi}\begin{pmatrix} h \\ j \quad l \end{pmatrix}}{\partial x^k} - \begin{pmatrix} s \\ j \quad l \end{pmatrix}(iks) = \frac{\partial (jli)}{\partial x^k} - a^{sr}(jlr)(iks).$$

Rezultă, schimbînd pe k cu l şi scăzînd

$$(14)\qquad R_{ijkl} = \frac{\partial (jli)}{\partial x^k} - \frac{\partial (jki)}{\partial x^l} + a^{rs}[(jkr)(ils) - (jlr)(iks)],$$

care este relaţia (13) urmărită.

c) Din relaţia (13) rezultă

$$(15)\qquad \begin{aligned} R_{ijkl} + R_{ijlk} = 0, \qquad & R_{ijkl} + R_{jilk} = 0, \\ R_{ijkl} = R_{jilk}, \qquad & R_{ijkl} = R_{klij}. \end{aligned}$$

d) Vrem să arătăm că în general, putem să ataşăm spaţiului riemannian într-un punct dat un spaţiu euclidian tangent.

Fie punctul P_0 luat ca origine. O transformare

$$x'^r = \alpha^r_i x^i + \ldots,$$

termenii nescrişi fiind de ordinul al doilea, păstrează originea P_0. Formulele de transformare ale tensorului fundamental

$$a'_{rs}\frac{\partial x'^r}{\partial x^i}\frac{\partial x'^s}{\partial x^j} = a_{ij}$$

devin în punctul P_0,

$$(a'_{rs})_0\, \alpha^r_i\, \alpha^s_j = a_{ij}.$$

Putem să alegem constantele α astfel ca $a'_{rs} = \delta_{rs}$. În adevăr, avem $n(n-1)/2 + n$ ecuaţii cu tot atîtea necunoscute. Putem să alegem deci un sistem de coordonate astfel ca metrica spaţiului riemannian să devină

$$(16)\qquad ds^2 = (dx^1)^2 + (dx^2)^2 + \ldots + (dx^n)^2 + a_{ij}dx^i\, dx^j,$$

unde a_{ij} se anulează în P_0.

Spunem că $x^1, x^2, \ldots, x^n$ astfel determinaţi constituie un sistem de *coordonate euclidiene*. O transformare care păstrează forma (16) este ortogonală.

Deci *orice spațiu V_n este asimilabil în ecare punct, cu un spațiu euclidian E_n, în termeni de primul ordin.* Sunem că E_n este *spațiul euclidian tangent.*

e) 1. Avem relația

(17) $$R_{ijkl} + R_{iklj} + R_{iljk} = 0.$$

În adevăr, relația avînd caracter tensorial, este suficient să o verificăm într-un sistem particular de coordonate, de exemplu în sistemul de coordonate euclidiene. În acest caz, în punctul P_0 considerat, coeficienții conexiunii se anulează; deci

$$R_{ijkl} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 a_{il}}{\partial x^j \partial x^k} + \frac{\partial^2 a_{jk}}{\partial x^i \partial x^l} - \frac{\partial^2 a_{jl}}{\partial x^i \partial x^k} - \frac{\partial^2 a_{ik}}{\partial x^j \partial x^l}\right)$$

cu care formula (16) rezultă simplu.

2. Să demonstrăm că într-un spațiu riemannian avem *identitatea Bianchi*

(18) $$R^i_{jkl,r} + R^i_{jlr,k} + R^i_{jrk,l} = 0,$$

$R^i_{jkl,r}$ fiind derivata covariantă a tensorului Riemann, R^i_{jkl}:

$$R^i_{jkl,r} = \frac{\partial R^i_{jkl}}{\partial x^r} - R^s_{jkl}\Gamma^i_{sr} + R^i_{skl}\Gamma^s_{jk} + R^i_{jsl}\Gamma^s_{kr} + R^i_{jks}\Gamma^s_{lr}.$$

Relația (18) avînd caracter tensorial, este suficient s-o verificăm într-un sistem de coordonate euclidiene în P_0; în acest punct $(\Gamma^i_{jk})_0$ sînt toate nule, dar nu și derivatele lor. Relația precedentă s-a redus în acest sistem, la

$$R^i_{jkl,r} = \frac{\partial R^i_{jkl}}{\partial x^r} = \frac{\partial^2 \begin{Bmatrix} i \\ j\ l \end{Bmatrix}}{\partial x^k \partial x^r} - \frac{\partial^2 \begin{Bmatrix} i \\ j\ k \end{Bmatrix}}{\partial x^l \partial x^r},$$

cu care relația (18) este verificată.

2. **Congruențe în A_n.** a) Într-un spațiu cu conexiune afină determinat prin coeficienții de conexiune Γ^i_{jk} ca funcții de $x^1, x^2, \ldots, x^n$, care la o transformare de coordonate

(1) $$x'^i = x'^i(x^1, x^2, \ldots, x^n) \quad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

se modifică după legea obiectelor geometrice

(2) $$\frac{\partial^2 x'^i}{\partial x^j \partial x^k} = \Gamma'^i_{rs}\frac{\partial x'^r}{\partial x^j}\frac{\partial x'^s}{\partial x^k} - \Gamma^r_{jk}\frac{\partial x'^i}{\partial x^r},$$

exprimăm torsiunea prin

(3) $$T^i_{jk} = \Gamma^i_{jk} - \Gamma^i_{kj}$$

și curbura prin

(4) $$\Gamma^i_{jkl} = \frac{\partial \Gamma^i_{jk}}{\partial x^l} - \frac{\partial \Gamma^i_{jl}}{\partial x^k} + \Gamma^i_{sk}\Gamma^s_{jl} - \Gamma^i_{sl}\Gamma^s_{jk}.$$

Introducem un sistem de congruențe pentru care, în notații obișnuite, între arcele s^a și coordonatele x^i avem relațiile

(5) $$ds^a = \lambda^a_i\, dx^i, \quad dx^i = \mu^i_a\, ds^a.$$

Un tensor, de exemplu U^i_{jk} devine în congruențe

(6) $$u^a_{bc} = U^i_{jk}\lambda^a_i \mu^j_b \mu^k_c.$$

b) Coeficienții conexiunii devin în sistemul de congruențe

(7) $$\gamma^a_{bc} = \left(\frac{\partial \lambda^a_i}{\partial x^k} + \Gamma^j_{ik}\lambda^a_j\right)\mu^k_b \mu^i_c;$$

rezultă prin scădere și schimbarea indicilor i, k în termenul al doilea

$$\gamma^a_{bc} - \gamma^a_{cb} = \left(\frac{\partial \lambda^a_i}{\partial x^k} - \frac{\partial \lambda^a_k}{\partial x^i}\right)\mu^k_b \mu^i_c + T^j_{ik}\lambda^a_j \mu^k_b \mu^i_c;$$

dar prima expresie din partea a doua este w^a_{bc}, coeficientul covariantului bilinear Δs^a iar ultima expresie este proiecția torsiunii în sistemul de congruențe. Avem deci componentele torsiunii într-un sistem de congruențe

(8) $$t^a_{bc} = \gamma^a_{bc} - \gamma^a_{cb} - w^a_{bc}.$$

Într-un spaţiu Riemann, torsiunea este nulă, $t^a_{bc} = 0$ şi regăsim o formulă cunoscută.

c) Avem în transportul paralel al vectorului v^a

$$dv^a = \gamma^a_{bc} v^b \, ds^c.$$

Rezultă

$$\delta dv^a = \frac{\partial \gamma^a_{bc}}{\partial s^d} v^b \delta s^d \, ds^c + \gamma^a_{pc} \delta v^p \, ds^c + \gamma^a_{bf} v^b \delta ds^f.$$

În termenul al doilea din partea a doua înlocuim

$$\delta v^p = \gamma^p_{bd} v^b \delta s^d.$$

Substituim pe c şi d între ele şi scădem, ţinînd seama că

$$\delta \, ds^f - d\delta s^f = \Delta s^f = w^f_{cd} \, ds^c \delta s^d.$$

Obţinem

(9) $$\Delta v^a = \gamma^a_{bcd} v^b \, ds^c \delta s^d,$$

unde

(10) $$\gamma^a_{bcd} = \frac{\partial \gamma^a_{bc}}{\partial s^d} - \frac{\partial \gamma^a_{bd}}{\partial s^c} + \gamma^a_{pc}\gamma^p_{bd} - \gamma^a_{pd}\gamma^p_{bc} + \gamma^a_{bf} w^f_{cd}.$$

Rezultă că γ^a_{bcd} au caracter tensorial şi măsoară curbura spaţiului în sistemul de congruenţe. Fiind proiecţia tensorului de curbură în sistemul de congruenţe, rezultă

(11) $$\gamma^a_{bcd} = \Gamma^i_{jkl} \lambda^a_i \mu^j_b \mu^k_c \mu^l_d .$$

3. Spaţii riemanniene de metrică nedefinită. a) Dacă forma

(1) $$ds^2 = a_{ij} \, dx^i \, dx^j$$

nu este definită pozitiv, reducînd-o la forma canonică nu obţinem o sumă de pătrate ci o succesiune de forma

(2) $$ds^2 = \varepsilon_a (ds^a)^2 = \varepsilon_1 (ds^1)^2 + \varepsilon_2 (ds^2)^2 + \ldots + \varepsilon_n (ds^n)^2,$$

unde $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n$ sînt egali cu 1 sau -1.

Dacă $ds^1, ds^2, \ldots, ds^n$ sînt diferenţiale totale exacte, spaţiul este euclidian dacă $\varepsilon_a = 1$ şi pseudoeuclidian în caz că sînt şi coeficienţi $\varepsilon_a = -1$.

Formele ds^a sînt determinate abstracţie făcînd de o transformare pseudoortogonală

(3) $$ds^a = c^a_b \, ds^b,$$

unde

(4) $$\varepsilon_a c^a_b c^a_c = \varepsilon_b \delta^b_c.$$

În prima parte sumăm în raport cu toţi indicii a iar în partea a doua nu sumăm în raport cu b, adică indicele pus lui ε nu are valoare de indice de sumare.

b) Identitatea Ricci

$$\frac{\partial a_{ij}}{\partial x^k} = a_{is}\Gamma^s_{jk} + a_{sj}\Gamma^s_{ik}$$

devine în congruenţe

$$\frac{\partial a_{ab}}{\partial s^c} = a_{af}\gamma^f_{bc} + a_{fb}\gamma^f_{ac}$$

iar pentru metrica (2) considerată, avem

(5) $$\varepsilon_a \gamma^a_{bc} + \varepsilon_b \gamma^b_{ac} = 0,$$

unde nu sumăm în raport cu a, b. Din relaţiile

$$\gamma^a_{bc} - \gamma^a_{cb} = w^a_{bc}$$

obţinem

$$\varepsilon_a w^a_{bc} + \varepsilon_b w^b_{ca} + \varepsilon_c w^c_{ba} =$$

$$= \varepsilon_a(\gamma^a_{bc} - \gamma^a_{cb}) + \varepsilon_b(\gamma^b_{ca} - \gamma^b_{ac}) + \varepsilon_c(\gamma^c_{ba} - \gamma^c_{ab}) =$$

$$= \varepsilon_a \gamma^a_{bc} + \varepsilon_c \gamma^c_{ab} + \varepsilon_b \gamma^b_{ca} + \varepsilon_a \gamma^a_{bc} + \varepsilon_b \gamma^b_{ca} - \varepsilon_c \gamma^c_{ab} =$$

sau

(6) $$\varepsilon_a \gamma^a_{bc} = \frac{1}{2} (\varepsilon_a w^a_{bc} + \varepsilon_b w^b_{ca} + \varepsilon_c w^c_{ba})$$

fără sumare în raport cu indicii.

Formulele (5), (6), în cazul metricii definite pozitiv, devin

$$\gamma^a_{bc} + \gamma^b_{ac} = 0, \tag{7}$$

$$\gamma^a_{bc} = \frac{1}{2}(w^a_{bc} + w^b_{ca} + w^c_{ba}). \tag{8}$$

4. Spaţiu iperbolic. a) 1. Considerăm forma fundamentală

$$X^2 = (x^0)^2 - (x^1)^2 - (x^2)^2 - (x^3)^2 \tag{1}$$

şi transformările lineare

$$x^\lambda = \alpha^\lambda_\mu x'^\mu \tag{2}$$

($\lambda, \mu = 0, 1, 2, 3$) care invariază forma (1). Numim aceste transformări, pseudoortogonale.

2. Punem în corespondenţă mulţimea a patru numere reale x^λ ($\lambda = 0, 1, 2, 3$) cu un punct X. Spunem că x^λ sînt coordonatele omogene ale punctului. Mulţimea tuturor punctelor X este un spaţiu cu trei dimensiuni. Mulţimea tuturor punctelor X ale căror coordonate satisfac relaţiei (1) este un *spaţiu iperbolic*. Transformările pseudoortogonale (2) permit să trecem de la un punct $X(x^\lambda)$ la un punct $X'(x'^\lambda)$ din acelaşi spaţiu iperbolic. (2) sînt ecuaţiile unor deplasări în acest spaţiu. Orice proprietate a punctelor care este invariantă într-o deplasare este o proprietate geometrică. Mulţimea acestor proprietăţi constituie *geometria iperbolică*.

Putem să construim geometria iperbolică după modelul analitic al geometriei euclidiene şi să adoptăm acelaşi limbaj. De exemplu, mulţimea punctelor ale căror coordonate omogene satisfac unei relaţii

$$f(x^0, x^1, x^2, x^3) = 0 \tag{3}$$

este numită *suprafaţă*. Mulţimea punctelor ale căror coordonate satisfac la două ecuaţii

$$f(x^0, x^1, x^2, x^3) = 0, \quad g(x^0, x^1, x^2, x^3) = 0 \tag{4}$$

este o *curbă*.

3. Numim *plan* mulţimea punctelor ale căror coordonate satisfac unei relaţii lineare

$$\xi_0 x^0 + \xi_1 x^1 + \xi_2 x^2 + \xi_3 x^3 = 0, \tag{5}$$

ξ_λ fiind numere reale; spunem că sînt coordonatele omogene ale planului. Într-o transformare de variabile (2) obţinem

$$\xi_\lambda x^\lambda = \alpha^\lambda_\mu \xi_\lambda x'^\mu = 0,$$

adică o relaţie de aceeaşi formă cu (5), unde

$$\xi'_\lambda = \alpha^\lambda_\mu \xi_\mu . \tag{6}$$

4. Considerăm cuadrica de ecuaţie

$$(x^0)^2 - (x^1)^2 - (x^2)^2 - (x^3)^2 = 0 \tag{7}$$

pe care o numim *absolutul* spaţiului iperbolic. Cu ajutorul absolutului instituim o dualitate, care asociază unui punct $X(x^\lambda)$ planul său dual

$$\xi_0 = \rho x^0, \quad \xi_h = -\rho x^h \quad (h = 1, 2, 3), \tag{8}$$

ρ fiind un factor; deci formei invariante (1) îi corespunde forma invariantă duală

$$\xi^2 = -\xi_0^2 + \xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2. \tag{9}$$

5. Coordonatele omogene ale punctelor fiind determinate abstracţie făcînd de un factor, le normăm astfel ca

$$X^2 = 1, \tag{10}$$

ceea ce atrage

$$\xi^2 = 1. \tag{11}$$

Adică, dacă x^λ sînt coordonatele unui punct le înmulţim cu un factor ρ astfel ca

$$\rho^2[(x^0)^2 - (x^1)^2 - (x^2)^2 - (x^3)^2] = 1. \tag{12}$$

Spaţiul iperbolic se limitează astfel la porţiunea pentru care

$$(x^0)^2 < (x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2, \tag{13}$$

deci la interiorul absolutului, adică în regiunea în care este situată originea (1, 0, 0, 0), care este şi centrul absolutului.

Datorită normării, precizăm factorul ρ din formulele (8), deci planul polar al punctului $X(x^\lambda)$ are coordonatele

$$\xi_0 = -\,\mathrm{i}x^0, \quad \xi_h = \mathrm{i}x^h. \tag{14}$$

De acum considerăm numai coordonate normate.

b) 1. Cu ajutorul formelor invariante (1), (9) introducem noţiunea de *produs scalar* a două puncte $X(x^\lambda)$, $Y(x^\lambda)$ prin

$$X\cdot Y = x^0y^0 - x^1y^1 - x^2y^2 - x^3y^3 \tag{15}$$

şi de produs scalar a două plane $\xi(\xi_\lambda)$, $\eta(\eta_\lambda)$ prin

$$\xi\cdot\eta = -\,\xi_0\eta_0 + \xi_1\eta_1 + \xi_2\eta_2 + \xi_3\eta_3. \tag{16}$$

Evident că formele (16), (17) sînt invariante odată cu (1), (9) în raport cu transformările pseudoortogonale considerate.

Spunem că punctele X, Y sau planele ξ, η sînt ortogonale, dacă

$$X\cdot Y = 0, \quad \text{respectiv} \quad \xi\cdot\eta = 0. \tag{17}$$

Înmulţirea scalară satisface proprietăţilor

$$X\cdot Y = Y\cdot X, \quad (X+Y)\cdot Z = X\cdot Z + Y\cdot Z$$

şi analog pentru plane.

Dacă X, Y sînt polii planelor ξ, η, avem relaţia

$$X\cdot Y = \xi\cdot\eta. \tag{18}$$

2. Introducem noţiunea de *distanţă* dintre punctele $X(x^\lambda)$, $Y(y^\lambda)$ ca cel mai mic număr d, pentru care

$$\mathrm{ch}\, d = X\cdot Y. \tag{19}$$

Introducem *unghiul* a două plane ξ, η ca cel mai mic număr θ pentru care

$$\cos\theta = \xi\cdot\eta. \tag{20}$$

3. Considerăm punctele $O(1, 0, 0, 0)$ şi $A(a^0, a^1, a^2, a^3)$. Distanţa euclidiană a dintre puncte este dată de

$$aa^0 = \sqrt{(a^1)^2 + (a^2)^2 + (a^3)^2}$$

iar distanţa neeuclidiană l, de

$$\mathrm{ch}\, l = a^0, \quad \mathrm{sh}\, l = \mathrm{i}\sqrt{(a^1)^2 + (a^2)^2 + (a^3)^2}.$$

Deci *între distanţa euclidiană a şi neeuclidiană l avem relaţia*

$$a = \mathrm{i}\,\mathrm{th}\, l. \tag{21}$$

4.1 Fiind date m puncte $X_1(x_1^\lambda)$, $X_2(x_2^\lambda), \ldots, X_m(x_m^\lambda)$, formăm matricea punctelor

$$(X_1X_2\ldots X_m) = \begin{pmatrix} x_1^0 & \mathrm{i}x_1^1 & \mathrm{i}x_1^2 & \mathrm{i}x_1^3 \\ x_2^0 & \mathrm{i}x_2^1 & \mathrm{i}x_2^2 & \mathrm{i}x_2^3 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ x_m^0 & \mathrm{i}x_m^1 & \mathrm{i}x_m^2 & \mathrm{i}x_m^3 \end{pmatrix} \tag{22}$$

Numim *normă* a punctelor $X_1, X_2, \ldots, X_m$ pe care o notăm $\overline{X_1X_2\ldots X_m}$ rădăcina pătrată din determinantul pătratului matricelor

$$\overline{X_1X_2\ldots X_m^2} = \det (X_1X_2\ldots X_m)^2. \tag{23}$$

Deoarece normele se exprimă prin produse scalare în sensul metricii, provenind din

$$\overline{X_1X_2\ldots X^2} = \begin{vmatrix} X_1^2 & X_1\cdot X_2 & \ldots & X_1\cdot X_m \\ X_1\cdot X_2 & X_1^2 & \ldots & X_2\cdot X_m \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ X_1\cdot X_m & X_2\cdot X_m & \ldots & X_m^2 \end{vmatrix}$$

rezultă că normele sînt invariante în transformările pseudoortogonale.

2. Cu ajutorul noțiunii de normă rezultă $X = 1$, $\xi = 1$,

$$\text{(24)} \qquad \operatorname{sh} XY = \overline{XY}, \qquad \sin \xi\eta = \overline{\xi\eta}.$$

c) 1. Determinăm o dreaptă prin două puncte X, Y. Fie X', Y' ortogonalele punctelor X, Y pe dreapta dată; punem $X' = aX + bY$ și ținem seama că $X^2 = 1$, $X \cdot X' = 0$, $\overline{XX'} = 1$; rezultă

$$X' = -\frac{X \cdot Y}{\overline{XY}} X + \frac{1}{\overline{XY}} Y;$$

deci

$$\text{(25)} \qquad (XX') = \frac{(XY)}{\overline{XY}}.$$

2. O dreaptă este perpendiculară pe un plan dacă trece prin polul planului.

Considerăm două drepte u, v concurente în punctul X. Numim *unghi* al celor două drepte concurente, unghiul θ al planelor μ, ν perpendiculare dreptelor în punctul X. Fie U, V ortogonalele punctului X pe cele două drepte; punctele U, V sînt polii planelor μ, ν, deci

$$\cos\theta = \mu \cdot \nu = U \cdot V.$$

Deci *unghiul* θ *al dreptelor concurente* u, v *este dat de*

$$\text{(26)} \qquad \cos\theta = U \cdot V, \quad \sin\theta = \overline{UV},$$

U, V fiind ortogonalele punctului de concurență X, pe cele două drepte.

Dacă dreptele u, v sînt determinate de punctele X, Y respectiv X, Z (Y și Z fiind arbitrare pe cele două drepte), avem după (25)

$$(XU) = \frac{(XY)}{\overline{XY}}, \quad (XV) = \frac{(XZ)}{\overline{XZ}}.$$

Dar

$$(XU)\cdot(XV) = \begin{pmatrix} X^2 & X\cdot V \\ X \cdot U & U \cdot V \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & U\cdot V \end{pmatrix},$$

de unde

$$\overline{(XU)\cdot(XV)} = U \cdot V$$

Deci unghiul θ a două drepte XY, XZ este dat de

$$\text{(27)} \qquad \cos\theta = \frac{\overline{(XY)\cdot(XZ)}}{\overline{XY}\,\overline{XZ}}$$

sau

$$\text{(28)} \qquad \sin\theta = \frac{\overline{XYZ}}{\overline{XY}\,\overline{XZ}},$$

deoarece, cum verificăm ușor,

$$\overline{(XY)\cdot(XZ)}^2 + \overline{XYZ}^2 = \overline{XY}^2\,\overline{XZ}^2.$$

d) 1. Rezultatele sînt valabile mai general, plecînd de la forma

$$\text{(29)} \qquad X^2 = (x^0)^2 + \varepsilon^2[(x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2]$$

și dual

$$\text{(30)} \qquad \xi^2 = \varepsilon^2\xi_0^2 + \xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2$$

și produsele scalare ale punctelor și planele fiind introduse conform acestei metrici. Cazul iperbolic corespunde pentru $\varepsilon^2 = -1$. În cazul $\varepsilon^2 = 1$ obținem *geometria eliptică*. Aceste geometrii sînt numite împreună *geometrii neeuclidiene*, fiind primele geometrii considerate care nu sînt euclidiene. Geometria iperbolică a fost introdusă, în același timp și independent, de către Nikolai Lobacevski în 1829 și Janos Bolyai în 1831 iar geometria eliptică a fost introdusă de Bernhard Riemann în 1854, publicată postum.

2. În cazul euclidian, $\varepsilon \to 0$ și normarea (29) impune condiția $x_0 = 1$ pentru puncte și

$$\xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2 = 1$$

pentru plane. Produsul scalar al punctelor nu are sens iar produsul scalar al planelor are semnificația obișnuită

$$\xi \cdot \eta = \xi_1\eta_1 + \xi_2\eta_2 + \xi_3\eta_3.$$

Formula unghiului este aceeaşi ca şi în cazul euclidian. Pentru distanţa dintre puncte, ea devine în cazul general, notînd $q = 1/\varepsilon$,

$$\cos\frac{d}{q} = X \cdot Y,$$

de unde

$$4\sin^2\frac{d}{2q} = 2\left(1 - \cos\frac{d}{q}\right) = X^2 + Y^2 - 2X \cdot Y =$$
$$= (x^0 - y^0)^2 + \varepsilon^2\Sigma(x^1 - y^1)^2,$$

deci

$$4q^2\sin^2\frac{d}{2q} = q^2(x^0 - y^0)^2 + (x^1 - y^1)^2 + (x^2 - y^2)^2 + (x^3 - y^3)^2.$$

În cazul euclidian cu $x^0 = 1$, $\varepsilon \to 0$, $q \to \infty$ obţinem formula clasică

$$d^2 = (x^1 - y^1)^2 + (x^2 - y^2)^2 + (x^3 - y^3)^2.$$

Deci geometria euclidiană este un caz limită, degenerat, al geometriei neeuclidiene. Geometria neeuclidiană este mai simplă decît cea euclidiană, deoarece în prima există o dualitate completă între puncte şi plane, între distanţe şi unghiuri.

5. Notiţe cu caracter istoric. a) Geometria euclidiană a spaţiului cu n dimensiuni a fost introdusă din prima jumătate a secolului al 19-lea ca un limbaj formal pentru enunţarea mai sugestivă a teoremelor de algebră şi de analiză în n variabile. Aceste cercetări au fost iniţiate de Arthur Cayley din 1843 şi Hermann Grassmann din 1844.

b) Pentru geometrie, considerarea spaţiului cu n dimensiuni a căpătat un sens, odată cu generalizarea noţiunii de spaţiu euclidian. Spaţiile generalizate sînt mai fine decît spaţiul euclidian, pe care îl cuprind ca un caz particular şi permit o explicare mai temeinică proprietăţilor euclidiene însele.

Promotorul acestei noi direcţii este Bernhard Riemann, prin memoriul său fundamental din 1854, publicat postum în 1876. El a introdus spaţiul pe care actual îl numim riemannian, ca o generalizare a noţiunii de geometrie intrinsecă a lui Carl Gauss, din 1828. Ideile lui Riemann au rămas mult timp nefructificate.

c) Elvin Christoffel a introdus unele notaţii adecvate, ca de exemplu simbolurile care îi poartă numele, prin care a exprimat mai simplu rezultatele lui Riemann. Gregorio Ricci a scos în evidenţă derivarea covariantă. Christoffel şi Ricci au pus bazele calculului tensorial, apt pentru scrierea comodă a formulelor într-un spaţiu Riemann. Ricci şi Tullio-Levi-Civita au definitivat acest calcul în 1900.

d) Spaţiul cu conexiune afină a fost considerat de Hermann Weyl în 1918 şi Elie Cartan în 1922.

Teoria grupurilor continue de transformări a fost iniţiată de Sophus Lie cristalizată în opera sa fundamentală în trei volume din 1888–1890, şi definitivată de Luigi Bianchi în 1903 şi Elie Cartan în 1928.

Calculul diferenţial absolut al congruenţelor a fost creat de Gheorghe Vrănceanu, din 1926.

PARTEA A DOUA

TEORIA RELATIVITĂŢII

I. TEORIA RELATIVITĂŢII RESTRÎNSE

A. GRUPUL LORENTZ

1. Mecanica clasică. a) În mecanica clasică admitem că spaţiul în care au loc evenimentele este euclidian. Luînd un sistem de axe ortogonale, poziţia unui punct $P(x, y, z)$ este cunoscută, cînd sînt date x, y, z ca funcţii de timp

$$(1) \qquad x = x(t), \qquad y = y(t), \qquad z = z(t)$$

cu condiţiile iniţiale

$$x_0 = x(t_0), \qquad y_0 = y(t_0), \qquad z_0 = z(t_0),$$

unde $P_0(x_0, y_0, z_0)$ este poziţia iniţială a punctului P.

Ecuaţiile (1) determină o curbă, traiectoria punctului P. Viteza este dirijată după tangenta în P la curbă şi are mărimea

$$(2) \qquad v^2 = \dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2,$$

notînd prin $\dot{x}$, $\dot{y}$, $\dot{z}$ derivatele coordonatelor, în raport cu t; putem să scriem şi

$$(3) \qquad v = \frac{ds}{dt},$$

unde ds este elementul de arc, pe curbă, dat de

$$(4) \qquad ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2.$$

Admitem principiul inerţial al lui Galileo Galilei (1638): *mişcarea unui punct asupra căruia nu acţionează nici o forţă este rectilinie şi uniformă.*

De aici rezultă că noţiunea de repaus absolut, a concepţiei antichităţii, nu are nici o semnificaţie. Mişcarea şi repausul au un înţeles numai raportate la un sistem de referinţă. Deci *noţiunile de mişcare şi de repaus sînt relative.*

Dacă asupra punctului $P(x, y, z)$ acţionează o forţă de vector $\overline{V}(X, Y, Z)$, coordonatele X, Y, Z fiind funcţii de x, y, z, şi eventual de t, atunci *ecuaţiile mişcării*, date de Isaac Newton, în 1687, *au forma*

$$(5) \qquad m\ddot{x} = X, \quad m\ddot{y} = Y, \quad m\ddot{z} = Z,$$

$\ddot{x}$, $\ddot{y}$, $\ddot{z}$ fiind proiecţiile acceleraţiei.

În mecanica clasică, numită şi *newtoniană*, spaţiul şi timpul au caracter absolut, considerate independente de mişcarea materiei. Timpul se scurge uniform, oricare ar fi mişcarea iar spaţiul are numai proprietăţi geometrice, nu şi fizice. Teoria relativităţii va corecta această concepţie.

b) *Legile mecanicii clasice sînt invariante faţă de deplasările spaţiului euclidian.*

Considerăm mai complet, *izometriile*, formate din deplasări (translaţii şi rotaţii) şi simetrii, adică transformări lineare care lasă forma canonică

$$(6) \qquad x^2 + y^2 + z^2$$

invariantă; deci metrica ds^2 dată de (4), adică *forma diferenţială pătratică*

$$(7) \qquad \varphi = dx^2 + dy^2 + dz^2$$

este invariantă în izometriile euclidiene.

Evident, este indiferent faptul că se mişcă un punct faţă de un sistem fix, ori că punctul este fix şi se schimbă, în acelaşi mod, sistemul de referinţă. Faţă de o schimbare arbitrară a poziţiei punctului, ori a sistemului de referinţă

$$(8) \quad x' = x'(x, y, z, t), \quad y' = y'(x, y, z, t), \quad z' = z'(x, y, z, t)$$

legile mişcării se modifică.

Dacă efectuăm însă o mişcare rectilinie uniformă, pe care o scriem

$$(9) \qquad x = x' + vt, \quad y = y', \quad z = z',$$

luînd dreapta de deplasare ca axă Ox, avem, v fiind constant,

$$(10) \qquad \dot{x} = \dot{x}' + v, \quad \dot{y} = \dot{y}', \quad \dot{z} = \dot{z}',$$

$$(11) \qquad \ddot{x} = \ddot{x}', \quad \ddot{y} = \ddot{y}', \quad \ddot{z} = \ddot{z}',$$

deci legile mişcării (5) sînt din nou invariante.

Spunem că (9) este o *transformare Galilei*. Pentru diferite valori ale lui v, avem transformările unui grup, cu un parametru, v

Deci, în afară de izometrii, *legile fizicii clasice sînt invariante faţă de grupul Galilei*.

Mai precis, admiţînd că este evident că o translaţie, o rotaţie sau o simetrie nu schimbă ecuaţiile mişcării, esenţială în mecanica clasică este transformarea Galilei (9). Rezultă că, în interiorul unei incinte, care este antrenată de o mişcare rectilinie şi uniformă, nu putem să ne dăm seama de mişcarea incintei, prin nici o experienţă fizică.

Relativ la formula (10), notînd $\dot{x} = u$, $\dot{x}' = u'$, avem *legea de compunere a vitezelor*

$$(12) \qquad u = u' + v,$$

u' fiind *viteza relativă* (faţă de sistemul mobil), u *viteza absolută* (faţă de sistemul iniţial) şi v *viteza de transport* (a sistemului mobil).

Numim *sisteme inerţiale* sistemele de referinţă deduse unul din altul printr-o deplasare rectilinie şi uniformă. Legile mecanicii sînt aceleaşi în orice sistem inerţial.

c) De exemplu, sub acţiunea gravitaţiei, un mobil lansat din origine cu viteza v_0 sub unghiul α, faţă de orizontală, descrie parabola

$$(13) \qquad x = v_0 \cos \alpha t, \quad y = -\frac{1}{2} g t^2 + v_0 \sin \alpha t.$$

La o rotaţie a axelor în planul lor

$$(14) \qquad x' = x \cos \theta + y \sin \theta, \quad y' = -x \sin \theta + y \cos \theta$$

7—c. 1767

avem

(15) $$x' = -\frac{1}{2} g\, t^2 \sin\theta + v_0 \cos(\alpha - \theta)t,$$

$$y' = -\frac{1}{2} g t^2 \cos\theta + v_0 \sin(\alpha - \theta)t,$$

care sînt tot ecuațiile (13), înlocuidn pe α prin $\alpha - \theta$ și pe $(0, g)$ prin mărimile proiecțiilor pe noile axe ale vectorului accelerației $\bar{g}(g \sin\theta, g\cos\theta)$.

Prin transformarea Galilei (9), avem de asemenea aceleași formule (13), dar în locul mărimilor proiecțiilor ($v_0 \cos\alpha$, $v_0 \sin\alpha$) ale vectorului $\bar{v}_0$, substituim mărimile proiecțiilor pe aceleași axe, ale vectorului rezultant $\bar{v}_0 + \bar{v}$, adică $v_0 \cos\alpha + v$, $v_0 \sin\alpha$.

d) N e w t o n a formulat principiile mecanicii, ca și *legea gravitației universale*, dată de el, în 1687:

(16) $$f = k\frac{m\, m'}{d^2},$$

unde m, m' sînt masele a două puncte materiale, măsurate în grame, d distanța dintre ele, măsurată în cm, iar

(17) $$k = 6{,}67\ 10^{-8}\ \mathrm{cm}^3\,\mathrm{g}^{-1}\,\mathrm{s}^{-2}$$

constanta gravitației universale. Aceste legi au dat un impuls considerabil mecanicii și mai general, timp de două secole, toate experiențele noi efectuate și toate fenomenele observate în fizică și astronomie erau explicate în concordanță cu legile mecanicii newtoniene.

Dar A l b e r t M i c h e l s o n, în experiența sa din 1881, prin care a măsurat viteza relativă a pămîntului, a ajuns la rezultatul că *viteza luminii nu depinde de situația că sistemul este fix sau mobil*, deci că legea de compunere a vitezelor (12) nu rămîne valabilă pentru viteza luminii, deci legile mecanicii clasice sînt contrazise pentru viteze foarte mari. Cam în același timp, s-a descoperit o altă contradicție privitor la radiația termică. Aceste fenomene și alte cîteva neconcordanțe constatate au dovedit că legile fizicii clasice sînt limitate la dimensiunile experiențelor obișnuite de laborator. Aceasta a constituit o criză profundă a fizicii în ansamblul ei, la sfîrșitul secolului trecut. Legile fizicii clasice își încetează valabilitatea în cosmos și în microcosmos.

Pentru fenomenele corespunzătoare trebuie să se creeze noi teorii matematice, care să se racordeze celor vechi și să se explice realitatea fizică în ansamblul ei.

În ceea ce privește structura atomului, răspunsul inițial a fost dat de M a x P l a n c k, care a emis în 1900, principiul că *energia este discontinuă*, cu care a fundamentat mecanica cuantică.

De cealaltă parte, pentru viteze comparabile cu viteza luminii, A l b e r t E i n s t e i n a formulat în 1905 ***principiul relativității***, pe care l-a generalizat în 1916.

2. Spațiul Minkowski. a) Considerăm ca formă invariantă a spațiului, în loc de $x^2 + y^2 + z^2$, forma de tip iperbolic

(1) $$c^2t^2 - x^2 - y^2 - z^2,$$

c fiind viteza luminii, pe care o considerăm aproximativ 300 000 km/s. După măsurări mai precise

(2) $$c = 299\ 792 \cdot 10^{5}\ \mathrm{cm\ s}^{-1}.$$

Formei finite (1) îi corespunde forma diferențială

(3) $$\varphi = c^2\mathrm{d}t^2 - \mathrm{d}x^2 - \mathrm{d}y^2 - \mathrm{d}z^2.$$

b) H e r m a n n M i n k o w s k i a considerat în 1909, că x, y, z și t sînt coordonatele unui punct într-un *spațiu cu patru dimensiuni*, dînd un rol simetric noțiunilor de spațiu și de timp. Spațiul 4-dimensional are metrica (3), deci este un *spațiu pseudoeuclidian*; punînd

(4) $$x^0 = ct, \quad x^1 = x, \quad x^2 = y, \quad x^3 = z,$$

avem forma diferențială

(5) $$\varphi = (\mathrm{d}x^0)^2 - (\mathrm{d}x^1)^2 - (\mathrm{d}x^2)^2 - (\mathrm{d}x^3)^2.$$

Mișcările rectilinii și uniforme sînt exprimate prin ecuații lineare în x^0, x^1, x^2, x^3. Singurele transformări biunivoce și bicontinue ale unui spațiu n-dimensional care păstrează ecuațiile lineare sînt transformările proiective, adică lineare în coordonate omogene. Considerațiile fizice necesită de asemenea ca elementele improprii

(de la infinit) să rămînă improprii, deci transformările trebuie să fie afine, adică lineare şi în coordonatele neomogene. Transformările permise de coordonate sînt deci transformările lineare

(6) $$x'^i = a^i_j x^j \qquad (i = 0,\ 1,\ 2,\ 3)$$

care invariază forma (5). Legile mecanicii relativiste trebuie să fie invariante în acest grup de transformări. Transformările lineare păstrează signatura formei (5), adică alternanţa semnelor, cînd o reducem la o sumă de pătrate. Fiind vorba de transformări lineare cu coeficienţi constanţi, este evident că aceeaşi transformare care invariază forma (1) o invariază şi pe (3) şi reciproc.

c) Referindu-ne la forma (3), mişcările spaţiului relativist sînt de exemplu transformările ortogonale în x, y, z care invariază separat metrica $x^2 + y^2 + z^2$ şi translaţiile timpului, $t' = t + h$.

În afara acestei transformări sau a altora, banale, operate separat asupra spaţiului şi asupra timpului, considerăm o transformare caracteristică, asupra variabilelor x şi t, care invariază forma

(7) $$x^2 - c^2t^2$$

şi separat, pe y şi pe z. În general, pentru ca forma

(8) $$x^2 - y^2$$

să fie invariantă într-o transformare lineară

(9) $$x = \alpha_{11}x' + \alpha_{12}y', \qquad y = \alpha_{21}x' + \alpha_{22}y'$$

trebuie ca

$$\alpha_{11}^2 - \alpha_{21}^2 = 1,\quad \alpha_{22}^2 - \alpha_{12}^2 = 1,\quad \alpha_{11}\alpha_{12} - \alpha_{21}\alpha_{22} = 0.$$

Punem $\alpha_{11} = \operatorname{ch}\alpha$, $\alpha_{22} = \operatorname{ch}\beta$, deci $\alpha_{21} = \operatorname{sh}\alpha$, $\alpha_{12} = \operatorname{sh}\beta$. Ultima relaţie ne dă $\operatorname{sh}(\alpha - \beta) = 0$, deci $\alpha = \beta$. Atunci

(10) $$x = x'\operatorname{ch}\alpha + y'\operatorname{sh}\alpha, \qquad y = x'\operatorname{sh}\alpha + y'\operatorname{ch}\alpha.$$

Transformările (10) formează evident, un grup cu un parametru.

Punînd $y = ct$, în (10), obţinem *transformările Lorentz*

(11) $$t = t'\operatorname{ch}\alpha + \frac{x'}{c}\operatorname{sh}\alpha,\ x = ct'\operatorname{sh}\alpha + x'\operatorname{ch}\alpha,\ y = y',\ z = z',$$

adică transformările lineare care invariază forma (7), deci pe (1).

Aceste transformări au fost date în 1901 de Hendrik Lorentz.

Deci *legile mecanicii relativiste sînt invariante în grupul Lorentz.*

d) Ca să dăm o semnificaţie fizică parametrului α din formulele (11), observăm că pentru originea noului sistem $x' = 0$, $y' = 0$, $z' = 0$, avem

(12) $$t = t'\operatorname{ch}\alpha,$$

deci, pentru această origine

(13) $$x = ct'\operatorname{sh}\alpha = ct\operatorname{th}\alpha.$$

Viteza originii noului sistem este deci

(14) $$v = \frac{dx}{dt} = c\operatorname{th}\alpha.$$

Obţinem atunci, interpretarea căutată

(15) $$\operatorname{th}\alpha = \frac{v}{c},$$

(16) $$\operatorname{ch}\alpha = \frac{1}{\sqrt{1 - \operatorname{th}^2\alpha}} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

Notăm

(17) $$\frac{1}{\nu} = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}.$$

Atunci putem să scriem transformările Lorentz sub forma

(18) $$x = \nu(x' + vt),\ t = \nu\left(t' + \frac{v}{c^2}x'\right),\ y = y',\ z = z'.$$

Din (17) rezultă

(19) $$v < c,$$

deci *viteza maximă a unui mobil este viteza luminii.*

e) Inversînd transformările Lorentz avem şi

(20) $$x' = x\operatorname{ch}\alpha + ct\operatorname{sh}\alpha,\ t' = t\operatorname{ch}\alpha - \frac{x}{c}\operatorname{sh}\alpha,\ y' = y,\ z' = z,$$

sau

(21) $$x' = \nu(x - vt),\ t' = \nu\left(t - \frac{v}{c^2}x\right),\ y' = y,\ z' = z.$$

Să compunem două transformări Lorentz de forma (21). Avem și

$$x'' = \nu'(x' - v't') = \nu''(x - v''t),$$

$$t'' = \nu'\left(t' - \frac{v'}{c^2}x'\right) = \nu''\left(t - \frac{v''}{c^2}x\right),\ y'' = y,\ z'' = z,$$

unde am pus

(22) $$\nu'' = \nu\nu'\left(1 + \frac{vv'}{c^2}\right),\quad v'' = \frac{v + v'}{1 + \frac{vv'}{c^2}}.$$

Deci *două transformări Lorentz, care corespund aceleiași direcții de translație sînt comutative.*

f) Plecăm de la transformările Lorentz

$$x' = \nu(x - vt),\quad t' = \nu\left(t - \frac{v}{c^2}x\right),\quad \frac{1}{\nu} = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}.$$

Avem

$$x' + ct' = \rho(x + ct),\ x' - ct' = \frac{1}{\rho}(x - ct),\ \rho = \nu\left(1 - \frac{v}{c}\right).$$

Rezultă că, notînd

(23) $$x^* = x + ct,\quad t^* = x - ct$$

transformarea Lorentz se reduce la

(24) $$x'^* = \rho x^*,\quad t'^* = \frac{1}{\rho}t^*.$$

Analog, punînd

(25) $$dx^* = dx + \frac{v}{2}dt,$$

grupul Galilei (1.9) devine

(26) $$dx'^* = dx,\quad dt'^* = dt.$$

g) În formulele Lorentz, v, care apare ca parametru, este viteza sistemului mobil (x', y', z') față de sistemul (x, y, z). Pentru experiențele obișnuite, v este foarte mic în comparație cu viteza luminii

(27) $$v \ll c.$$

Pentru $v = 0$ obținem transformarea identică $x' = x$, $t' = t$. Desvoltînd în serie

$$\nu = \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-\frac{1}{2}} = 1 + \frac{v^2}{2c^2} + \ldots$$

deci

(28) $$t' = t - \frac{v}{c^2}x + \ldots,\ x' = x - vt + \ldots,\ y' = y,\ z' = z.$$

Termenii scriși, de primul ordin, constituie *transformarea infinitezimală* a grupului Lorentz.

Vectorul care determină transformarea infinitezimală are coordonatele $\left(-\frac{x}{c^2}, -t, 0, 0\right)$. Avem deci *ecuațiile diferențiale* ale grupului Lorentz

(29) $$\frac{c^2 dt}{x} = \frac{dx}{t} = \frac{dy}{0} = \frac{dz}{0}$$

cu integralele

(30) $$c^2t^2 - x^2 = \alpha,\ x = \beta,\ z = \gamma.$$

Prin transformarea

(31) $$t' = t,\ x' = c^2t^2 - x^2,\ y' = y,\ z' = z$$

reducem vectorul transformării infinitezimale la forma canonică (1, 0, 0, 0,).

Funcția invariantă în grup este o soluție a ecuației cu derivate parțiale $\frac{x}{c^2}\frac{\partial\varphi}{\partial t} + t\frac{\partial\varphi}{\partial x} = 0$, de unde rezultă $\varphi = c^2t^2 - x^2$ și, în general, o funcție arbitrară de φ.

h) Ţinînd seama că $v : c \approx 0$ pentru viteze mici, deci $\nu \approx 1$, transformarea Lorentz (21) devine

$$x' = x - vt, \; t' = t, \; y' = y, \; z' = z,$$

deci o mişcare uniformă de-a lungul axei Ox, adică o transformare Galilei.

Deci *principiul relativităţii nu contrazice legile mecanicii clasice ci le cuprinde ca un caz limită.*

Dacă efectuăm produsul unei transformări Lorentz printr-o rotaţie euclidiană în x, y, z obţinem o transformare mai generală, care invariază spaţiul Minkowski.

Transformările Lorentz joacă în mecanica relativităţii restrînse rolul transformărilor Galilei din mecanica clasică. Rezultă că, abstracţie făcînd de rotaţiile banale, euclidiene, în x, y, z, *rolul esenţial în mecanica relativistă îl joacă transformăile Lorentz.*

3. Relativitatea spaţiului şi a timpului. a) Considerăm transformarea Lorentz (2.11)

(1) $ct = ct' \operatorname{ch}\alpha + x' \operatorname{sh}\alpha, \; x = ct' \operatorname{sh}\alpha + x' \operatorname{ch}\alpha, \; y = y', \; z = z'.$

Fie $P_1(x_1, y_1, z_1, t_1)$ şi $P_2(x_2, y_2, z_2, t_2)$ două evenimente; ele se transformă prin (1) în

(2) $$c(t_2 - t_1) = c(t_2' - t_1') \operatorname{ch}\alpha + (x_2' - x_1') \operatorname{sh}\alpha,$$

(3) $$x_2 - x_1 = c(t_2' - t_1') \operatorname{sh}\alpha + (x_2' - x_1') \operatorname{ch}\alpha,$$

(4) $$y_1' = y_1, \; y_2' = y_2, \; z_1' = z_1, \; z_2' = z_2.$$

Presupunem $t_1 = t_2$, adică evenimentele P_1, P_2 sînt iniţial, simultane. Conform cu (2), ele nu rămîn simultane după transformare, adică $t_1' \neq t_2'$ pentru $\alpha \neq 0$ şi $x_1' \neq x_2'$.

b) Considerăm acum o bară rigidă aşezată pe axa x, cu capetele în $P_1(x_1, 0, 0)$, $P_2(x_2, 0, 0)$, avînd iniţial, adică la $t = 0$, lungimea $l = |x_1 - x_2|$. După transformare, calculăm lungimea barei, la momentul t', cînd punctele P_1, P_2 devin $P_1'(x_1', 0, 0)$, $P_2'(x_2', 0, 0)$. Avem

$$x_1 = x_1' \operatorname{ch}\alpha + ct' \operatorname{sh}\alpha, \quad x_2 = x_2' \operatorname{ch}\alpha + ct' \operatorname{sh}\alpha$$

deci $x_1 - x_2 = (x_1' - x_2') \operatorname{ch}\alpha$; atunci

(5) $$l = l' \operatorname{ch}\alpha.$$

Deoarece

$$\operatorname{ch}\alpha = \frac{e^{\alpha} + e^{-\alpha}}{2} = 1 + \frac{\alpha^2}{2} + \ldots \geqslant 1,$$

avem

(6) $$l' \leqslant l.$$

Deci *lungimile se contractă în sensul mişcării.*

Putem să scriem formula (5) şi astfel

(7) $$l' = l\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}.$$

c) Analog, pentru timp. Presupunem că din originea sistemului iniţial trimitem două semnale luminoase la momentele t_1, t_2. În originea noului sistem ($x' = 0$) ele par să fie emise la momentele t_1', t_2' conform cu (2.12)

$$t_1 = t_1' \operatorname{ch}\alpha, \quad t_2 = t_2' \operatorname{ch}\alpha$$

sau, punînd $\tau = t_2 - t_1$,

(8) $$\tau = \tau' \operatorname{ch}\alpha$$

de unde

(9) $$\tau' \leqslant \tau.$$

Deci *timpul se contractă în sensul mişcării.*

Noţiunile de spaţiu şi de timp îşi pierd, astfel, caracterul lor de idei absolute. Ele sînt noţiuni fizice, depinzînd de sistemul la care sînt raportate. Această observaţie a denumit întreaga teorie, ca teoria relativităţii.

d) Din formula (2.21)

$$t' = \nu\left(t - \frac{v}{c^2}x\right), \quad \frac{1}{\nu} = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

rezultă

$$t_2' = t_1' = \nu\left[t_2 - t_1 - \frac{v}{c^2}(x_2 - x_1)\right],$$

(10) $$\frac{1}{\nu}\frac{t_2' - t_1'}{t_2 - t_1} = 1 - \frac{vm}{c^2}, \quad m = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1}.$$

Avem $\nu > 0$; presupunem $v > 0$, $t_2 > t_1$, $x_2 > x_1$; deoarece $v < c$ şi viteza medie $m < c$; rezultă $vm < c^2$, deci partea a doua a relaţiei (10) este pozitivă. Atunci $t_2' > t_1'$.

Deci *ordinea evenimentelor este păstrată în mecanica relativistă.*

Ipoteza $v > c$ ar răsturna principiul cauzalităţii făcînd posibil ca într-un sistem de referinţă efectul să preceadă cauza; dar atunci nu mai sînt valabile nici formulele considerate, încît contradicţia este aparentă.

e) Din formulele Lorentz (2.18)

$$x = \nu(x' + vt'), \quad t = \nu\left(t' + \frac{v}{c^2}x'\right)$$

avem

(11) $$dx = \nu(dx' + v\,dt'), \quad dt = \nu\left(dt' + \frac{v}{c^2}dx'\right).$$

Notăm cu u, u' vitezele mobilului în sistemul fix şi în cel mobil:

(12) $$u = \frac{dx}{dt}, \quad u' = \frac{dx'}{dt'}.$$

Avem din (11),

$$u = \frac{dx}{dt} = \frac{\frac{dx'}{dt'} + v}{1 + \frac{v}{c^2}\frac{dx'}{dt'}}.$$

Obţinem *formula de compunere a vitezelor*, în mecanica relativistă

(13) $$u = \frac{u' + v}{1 + \frac{v}{c^2}u'},$$

u fiind ***viteza absolută***, u' ***viteza relativă*** şi v, ***viteza de transport.***

Pentru viteze mici, $v \ll c$, obţinem formula clasică

(14) $$u = u' + v.$$

Cînd $u' = c$ este viteza luminii, obţinem $u = c$, deci ***viteza luminii este aceeaşi în orice sistem inerţial.***

Cînd $v = u' = 0$, obţinem $u=c$. Regăsim rezultatul că nu putem să depăşim viteza luminii.

f) În formula (13) u este mărimea vitezei de-a lungul axei Ox ($u = u_x$). Pentru mărimea componentei pe axa y a vitezei, avem

$$u_y = \frac{dy}{dt} = \frac{dy'}{dt} = \frac{dy'}{dt'} \cdot \frac{1}{\frac{dt}{dt'}} = \frac{u_y'}{\nu\left(1 + \frac{v}{c^2}u'\right)},$$

deci

(15) $$u_y = u_y'\frac{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}{1 + \frac{v}{c^2}u'}.$$

Analog pentru u_z.

În particular, cînd $u' = 0$, adică viteza, în mişcarea în planul Oxy, este dirijată toată pe Oy, adică mobilul se deplasează transversal direcţiei de translaţie a sistemului, avem

(16) $$u_y = u_y'\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}},$$

deci *viteza se micşorează*, adică mişcarea se încetineşte.

Observăm că formulele (15) de compunere a vitezelor nu sînt simetrice în componentele $\bar{u}(u, u_y, u_z)$ şi $\bar{v}(v, 0, 0)$ ale celor două viteze. Rezultă că, în general, două transformări Lorenz, care corespund la direcţii diferite de transport, nu sînt comutative. Regăsim comutativitatea pentru $u_y = 0$, $u_z = 0$, adică pentru deplasarea mobilului în sensul transportului reperului.

g) Din punct de vedere istoric, Einstein a enunţat ecle două principii care constituie teoria relativităţii.

1. Viteza luminii este independentă de sistemul inerţial de referinţă.

2. Legile fizicii nu se schimbă cînd trecem de la un sistem inerţial la altul.

Am numit sisteme inerțiale sistemele de referință deduse unul din altul printr-o transformare Lorentz. Adoptînd punctul de vedere geometric, al invarianței formei

$$\varphi = c^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2,$$

am dedus principiul 2, de fapt aceste principii sînt echivalente, și de aici, principiul 1. Scriind forma φ sub forma

$$\varphi = dt^2\left(c^2 - \frac{dx^2 + dx^2 + dz^2}{dt^2}\right) = dt^2(c^2 - v^2),$$

rezultă din (2.19)

(17) $$\varphi \geqslant 0.$$

Vrem să arătăm că reciproc, din principiul 1 rezultă 2, adică *cele două principii 1 și 2 sînt echivalente.* Presupunem axa Ox fixă iar $O'x'$ mobilă de-a lungul lui Ox, cu viteza constantă v. La momentul $t_0 = 0$ originile O și O' coincid. Notăm cu x abscisa unui mobil M la timpul t, în raport cu axa fixă și cu x', abscisa lui la timpul t', în raport cu sistemul mobil.

Considerăm cazul cel mai simplu, al unei legături lineare

$$x' = ax + bt.$$

Scriem relația pentru punctul $M = O'$, deci $x' = 0$, $x = OO' = vt$. Rezultă $b = -av$, deci

(18) $$x' = a(x - vt).$$

Considerăm invers, sistemul $O'x'$ fix și sistemul Ox mobil cu viteza $-v$; trebuie să avem aceeași lege de mișcare adică

$$x = a(x' + vt'),$$

de unde

$$t' = \frac{x - ax'}{av};$$

înlocuind pe x' prin valoarea din (18), obținem

(19) $$t' = at - \frac{a^2 - 1}{av}x.$$

Aplicăm acum principiul relativist al constanței vitezei luminii. Presupunem că pentru $t_0 = t'_0 = 0$ o rază de lumină pleacă din $O = O'$, și ajunge în punctul M în timpul t, respectiv t'. Avem $x = ct$, $x' = ct'$. Rezultă din (18) și (19)

$$ct' = a(c - v)t, \quad t' = \left(a - \frac{a^2 - 1}{av}c\right)t$$

și prin împărțire

$$c = \frac{a(c - v)}{a - \frac{a^2 - 1}{av}c}.$$

Rezultă

(20) $$a = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}.$$

Revenind la (18) și (19), obținem formulele Lorentz

(21) $$x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \quad t' = \frac{t - \frac{v}{c^2}x}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}.$$

Interpretarea fizică ne permite să înțelegem de ce inversăm formulele, schimbînd doar semnul lui v.

4. Experiențe fizice explicate relativist. a) Albert Michelson în experiența sa din 1881, prin care a măsurat viteza relativă a pămîntului, a ajuns la rezultatul că viteza luminii nu depinde de situația că sistemul este fix sau mobil și de direcția de deplasare; a fost prima dovadă că legile mecanicii clasice au un caracter limitat. Aparatul este format ca în fig. 7. Din L pleacă o rază de lumină în direcția LA, a translației Pămîntului și ajunge în O, în luneta S, înclinată la 45°, unde se desface în două; o parte continuă drumul pînă în A, se reflectă într-o oglindă și se reîntoarce în O; altă rază merge transversal

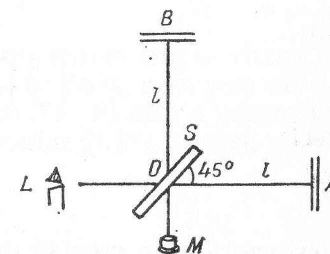


Fig. 7

în B, se reflectă și se întoarce în O.

Fie $OA = OB = l$, c viteza luminii de-a lungul drumului longitudinal OA, v viteza de translație a Pămîntului, t_1 timpul în care raza a parcurs drumul OA la dus și t_2 la întors, toate datele fiind raportate la sistemul fix. Deci raza revine în O, pe drumul longitudinal, după timpul

$$(1)\qquad t = t_1 + t_2 = \frac{l}{c+v} + \frac{l}{c-v} = \frac{2lc}{c^2 - v^2}.$$

Deoarece observatorul O participă la translația Pămîntului, viteza de propagare a luminii pe drumul transversal este

$$u = \sqrt{c^2 - v^2}.$$

Timpurile de dus și de întors din B ale razei sînt egale și atunci timpul de dus și de întors este

$$(2)\qquad t' = 2\frac{l}{\sqrt{c^2 - v^2}}.$$

Rezultă

$$(3)\qquad k = \frac{t'}{t} = \frac{\sqrt{c^2 - v^2}}{c} < 1.$$

Deci teoretic, conform legilor mecanicii clasice, timpul de parcurgere al drumului longitudinal este mai lung decît timpul de parcurgere al drumului transversal. Diferența este foarte mică, deoarece k este foarte aproape de 1,

$$(4)\qquad k = \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{\frac{1}{2}} \approx 1 - \frac{v^2}{2c^2}$$

iar

$$\left(\frac{v}{c}\right)^2 = \left(\frac{30}{300\,000}\right)^2 = \frac{1}{10^8},$$

deci

$$(5)\qquad 1 - k \approx 5\cdot 10^{-9}.$$

Deși este foarte greu să decelăm această diferență foarte mică, însă în acest caz trebuie să se producă fenomene de interferență, observabile în microscopul M. Totuși ele nu au loc. Rezultă că $t = t'$, deci viteza luminii nu depinde de direcția de propagare.

Pentru explicarea paradoxului, George Fitzgerald a admis, în 1891, că lungimea l a brațului aparatului variază cu unghiul de înclinare. Ipoteza a fost adîncită de Lorenz, în 1900. Dar, rămînînd în cadrul mecanicii clasice, aceste afirmații nu erau justificate.

Experiența se explică în teoria relativității, o bara longitudinală OA contractîndu-se. Notînd cu l' lungimea lui OA în timpul mișcării, din $t = t'$ rezultă

$$\frac{2l'c}{c^2 - v^2} = \frac{2l}{\sqrt{c^2 - v^2}},$$

deci

$$(6)\qquad l' = kl = l\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

conform formulei (3.7).

Contracția

$$(7)\qquad \varkappa = l - l' \approx l\frac{v^2}{2c^2}$$

este foarte mică. De exemplu, pentru $l = 10$ km $= 10^6$ cm, avem

$$(8)\qquad \varkappa = \frac{10^6}{2}\cdot\frac{1}{10^8} = \frac{1}{200} = 0{,}05,$$

deci $\varkappa = 0{,}05$ cm.

b) Hippolyte Fizeau a studiat mișcarea luminii într-un mediu fluid și a obținut experimental formula

$$(9)\qquad u = w + v\left(1 - \frac{w^2}{c^2}\right);$$

unde v este viteza fluidului în raport cu un sistem fix, w viteza luminii în raport cu fluidul, u viteza luminii în fluid, în raport cu sistemul fix, iar c viteza luminii în vid. Formula (9) este o consecință a formulei de compunere relativistă a vitezelor (3.13), pentru $u' = w$. În adevăr, din (3.13)

$$u = \frac{v + w}{1 + \frac{vw}{c^2}};$$

$\frac{vw}{c^2}$ fiind foarte mic, avem

$$u \approx (v + w)\left(1 - \frac{vw}{c^2}\right) \approx w + v\left(1 - \frac{w^2}{c^2}\right).$$

În adevăr, neglijăm termenul $\frac{v^2 w}{c^2}$ foarte mic, dar nu și pe $\frac{w^2}{c^2}$, deoarece w și c sînt de același ordin de mărime (viteza luminii în fluid și în vid. Deci experiența Fizeau se explică prin teoria relativității.

Fizeau notează $w = c/n$, n fiind indicele de refracție al fluidului și formula (9) devine

$$u = w + v\left(1 - \frac{1}{n^2}\right). \tag{10}$$

c) Este cunoscut din fizică, efectul Doppler-Fizeau, observat în 1842, datorită căruia un observator în mișcare relativă față de o sursă de unde luminoase sau electromagnetice percepe o undă cu frecvență mai mare sau mai mică decît aceea emisă de undă, după cum sursa sau observatorul se apropie sau se depărtează între ele.

Justificarea acestei legi implică din nou teoria relativității. Presupunem că o sursă de vibrație este în repaos în punctul M. Pentru observatorul din O, vibrația va fi reprezentată prin legea

$$\varphi = a \sin 2\pi\mu\left(t - \frac{x}{c}\right), \tag{11}$$

μ fiind frecvența. În sistemul mobil $O'x'$, în translație cu viteza v avem o formulă analoagă

$$\varphi' = a \sin 2\pi\mu'\left(t' - \frac{x'}{c}\right) = \varphi. \tag{12}$$

Între x, t, x', t' avem relațiile Lorentz ; deci

$$\mu\left(t - \frac{x}{c}\right) = \mu'\nu\left(t - \frac{v}{c^2}x - x + vt\right).$$

Relația trebuie să fie adevărată oricare ar fi x și t; deci

$$\mu = \mu'\sqrt{\frac{1 + \frac{v}{c}}{1 - \frac{v}{c}}}. \tag{13}$$

Dacă observatorul stă pe loc și sursa este mobilă, înlocuim pe μ cu μ' și invers, pe v cu $-v$ și obținem același rezultat. Fenomenul se exprimă deci identic în ambele sisteme.

Avem $\mu' < \mu$, deci pentru o depărtare în sensul razei, frecvența scade și, reciproc, crește la apropiere. Ca formulă aproximativă, scriind

$$\mu = \mu' \frac{1 + \frac{v}{c}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \approx \mu'\left(1 + \frac{v}{c}\right)\left(1 + \frac{v^2}{2c^2} + \dots\right),$$

avem

$$\mu = \mu'\left(1 + \frac{v}{c}\right). \tag{14}$$

d) Considerăm formulele de compunere a vitezei (3.13, 16) :

$$u_x = \frac{u'_x + v}{1 + \frac{v}{c^2}u'_x}, \qquad u_y = u'_y \frac{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}{1 + \frac{v}{c^2}u'_x},$$

deci

$$\frac{u_y}{u_x} = \frac{u'_y\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}{u'_x + v}. \tag{15}$$

Presupunem mișcarea plană (fig. 8). În sistemul xOy în care direcția de deplasare OM face unghiul θ cu Ox, avem

$$u_x = u\cos\theta, \quad u_y = u\sin\theta,$$
$$u'_x = u'\cos\theta', \quad u'_y = u'\sin\theta',$$

u și u' fiind viteza absolută și relativă.
Avem atunci, din (15),

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{u'\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}\sin\theta'}{u'\cos\theta' + v}, \tag{16}$$

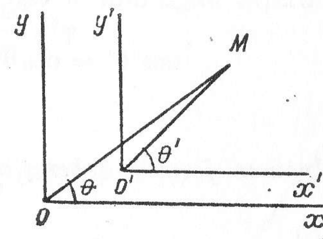


Fig. 8

formulă care arată cum se modifică direcția de deplasare, cînd trecem de la un sistem la altul.

Facem o aplicaţie a acestei formule, pentru devierea razelor de lumină, deci punem în (16) $u' = c$. Obţinem

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}\,\sin\theta'}{\cos\theta' + \frac{v}{c}},$$

de unde

$$\operatorname{tg}\theta' - \operatorname{tg}\theta = \frac{\sin\theta'\cos\theta'\left(1-\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}\right) + \frac{v}{c}\sin\theta'}{\cos\theta'\left(\cos\theta'+\frac{v}{c}\right)}.$$

Cînd M nu este aproape de verticală, $\cos\theta$ şi $\cos\theta'$ sînt finite; neglijăm pe $\frac{v}{c}$ de la numitor fiind prea mic faţă de $\cos\theta'$. De asemenea

$$1-\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} = 1-\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{\frac{1}{2}} = 1-\left(1-\frac{v^2}{2c^2}+\dots\right)\approx\frac{v^2}{2c^2},$$

factor pe care îl neglijăm fiind prea mic faţă de $\frac{v}{c}$. Formula precedentă devine

$$\text{(17)}\qquad \frac{\sin(\theta'-\theta)}{\cos\theta} = \frac{\frac{v}{c}\sin\theta'}{\cos\theta'}.$$

Variaţia unghiului θ este foarte mică; punem $\theta' = \theta + \Delta\theta$; deci

$$\cos\theta' = \cos\theta\cos\Delta\theta - \sin\theta\sin\Delta\theta \approx \cos\theta,$$

$$\sin\Delta\theta \approx \Delta\theta.$$

Obţinem *formula aberaţiei luminii*

$$\text{(18)}\qquad \Delta\theta = \frac{v}{c}\sin\theta'.$$

Corecţia $\Delta\theta$ este cuprinsă deci între 0 şi $\frac{v}{c} \approx 10^{-4}$

5. Propagarea undelor luminoase. a) Presupunem că în originea O a unui sistem de referinţă $Oxyz$ se produce un fenomen luminos, reprezentat prin ecuaţia vibraţiei simple

$$\text{(1)}\qquad \varphi_0 = a\sin\omega t.$$

a fiind amplitudinea şi ω pulsaţia.

Presupunem punctul $M(x, y, z)$ mobil pe raza $OM = r$, ale cărei cosinusuri directoare cu axele le notăm prin α, β, γ; avem

$$\text{(2)}\qquad \alpha^2+\beta^2+\gamma^2 = 1,$$

$$\text{(3)}\qquad r = \alpha x + \beta x + \gamma z.$$

Starea de vibraţie din O, care se propagă cu viteza c de-a lungul dreptei OM, ajunge în M cu o întîrziere faţă de O, dată de timpul

$$\text{(4)}\qquad t_1 = \frac{r}{c}.$$

Starea de vibraţie în punctul M este dată deci de

$$\text{(5)}\qquad \varphi = a\sin\omega(t-t_1) = a\sin\omega\left(t-\frac{r}{c}\right).$$

Prin derivări, ţinînd seama de (3), avem

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x} = -\frac{a\omega}{c}\cos\omega\left(t-\frac{r}{c}\right)\frac{\partial r}{\partial x} = -\frac{a\alpha\omega}{c}\cos\omega\left(t-\frac{r}{c}\right),$$

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} = -\frac{a\alpha^2\omega^2}{c^2}\sin\omega\left(t-\frac{r}{c}\right) = -\frac{\omega^2}{c^2}\alpha^2\varphi$$

şi analoagele; deci

$$\Delta\varphi = \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2} = -\frac{\omega^2}{c^2}(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)\varphi.$$

adică, după (2),

$$\text{(6)}\qquad \Delta\varphi = -\frac{\omega^2}{c^2}\varphi.$$

Pe de altă parte,

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = a\,\omega \cos \omega \left(t - \frac{r}{c}\right),$$

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = -\,a\omega^2 \sin \omega \left(t - \frac{r}{c}\right) = -\,\omega^2 \varphi.$$

Avem deci *ecuația propagării undei luminoase*

(7) $$\Delta\varphi - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = 0$$

dată de Jean d'Alembert. Introducem operatorul, numit *dalambertian*

(8) $$\Box = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}$$

asociat metricii relativității restrînse

(9) $$\varphi = c^2 \mathrm{d}t^2 - \mathrm{d}x^2 - \mathrm{d}y^2 - \mathrm{d}z^2.$$

Atunci ecuația propagării undei este

(10) $$\Box \varphi = 0.$$

b) Vom arăta că dalambertianul este invariant într-o transformare Lorentz

(11) $$x = \nu(x' + vt'),\ y = y',\ z = z',\ t = \nu\left(t' + \frac{v}{c^2}x'\right).$$

În adevăr

$$\frac{\partial x}{\partial x'} = \nu, \quad \frac{\partial x}{\partial t'} = \nu v, \quad \frac{\partial t}{\partial x'} = \frac{v}{c^2}\nu, \quad \frac{\partial t}{\partial t'} = \nu.$$

Atunci

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x'} = \frac{\partial \varphi}{\partial x}\nu + \frac{\partial \varphi}{\partial t}\frac{\nu v}{c^2}, \qquad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x'^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x'}\right)\nu + \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x'}\right)\frac{\nu v}{c^2},$$

(12) $$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x'^2} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}\nu^2 + 2\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x\,\partial t}\frac{\nu^2 v}{c^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2}\frac{\nu^2 v^2}{c^2}.$$

Apoi

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t'} = \frac{\partial \varphi}{\partial x}\nu v + \frac{\partial \varphi}{\partial t}\nu, \qquad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t'^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial t'}\right)\nu v + \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial t'}\right)\nu,$$

(13) $$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t'^2} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}\nu^2 v^2 + 2\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial t}\nu^2 v + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2}\nu^2$$

Ținînd seama că $\frac{1}{\nu^2} = 1 - \frac{v^2}{c^2}$, rezultă

(14) $$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x'^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t'^2} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2},$$

Deci *ecuația propagării undelor luminoase este invariantă într-o transformare Lorentz.*

c) Pentru o rază de lumină $v = c$, deci

(15) $$\mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2 + \mathrm{d}z^2 = c^2\mathrm{d}t^2.$$

Plecăm dintr-un punct $O(x_0,\ y_0,\ z_0)$; de-a lungul razei de lumină

$$\frac{x - x_0}{\alpha} = \frac{y - y_0}{\beta} = \frac{z - z_0}{\gamma} = r$$

avem

$$\mathrm{d}x = \alpha \mathrm{d}r$$

și analoagele. Prin ridicare la pătrat și adunare avem, ținînd seama de (15),

$$\mathrm{d}r = c\,\mathrm{d}t \quad \text{și} \quad r = c(t - t_0),$$

deci, de-a lungul unei raze de lumină

(16) $$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 - c^2(t - t_0)^2 = 0.$$

Privim pe (16) ca o ecuație în t;

(17) $$ct = f(x,\ y,\ z),$$

unde

(18) $$f = ct_0 + r,\ r^2 = (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2.$$

Avem

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{x - x_0}{r} = \alpha$$

etc.; deci

(19) $$(\text{grad } f)^2 = 1.$$

Dacă privim pe (16) ca o ecuaţie de forma

(20) $$\omega(x, y, z, t) = 0,$$

unde

(21) $$\omega = \Sigma(x - x_0)^2 - c^2(t - t_0)^2,$$

avem

$$\frac{\partial \omega}{\partial x} = 2(x - x_0) = 2\alpha r = 2\alpha c(t - t_0)$$

etc.;

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} = -2c^2(t - t_0).$$

Deci

$$\frac{1}{c^2}\left(\frac{\partial \omega}{\partial t}\right)^2 = \left(\frac{\partial \omega}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \omega}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \omega}{\partial z}\right)^2$$

sau

(22) $$\frac{1}{c}\frac{\partial \omega}{\partial t} = \text{grad } \omega.$$

Rezultă că funcţia din prima parte a relaţiei (16) care dă ecuaţia razelor luminoase este o soluţie particulară a ecuaţiilor (19) sau (22).

Ecuaţiile (19), (22) sînt invariante într-o transformare Lorentz. De exemplu, după formulele precedente, avem

$$\frac{\partial \omega}{\partial x'} = \nu\left(\frac{\partial \omega}{\partial x} + \frac{v}{c^2}\frac{\partial \omega}{\partial t}\right), \quad \frac{\partial \omega}{\partial t'} = \nu\left(v\frac{\partial \omega}{\partial x} + \frac{\partial \omega}{\partial t}\right);$$

deci

(23) $$\frac{1}{c^2}\left(\frac{\partial \omega}{\partial t'}\right)^2 - \left(\frac{\partial \omega}{\partial x'}\right)^2 = \frac{1}{c^2}\left(\frac{\partial \omega}{\partial t}\right)^2 - \left(\frac{\partial \omega}{\partial x}\right)^2.$$

d) În spaţiul Minkowski, ecuaţia (16) reprezintă un ipercon cu vîrful în $O(x_0, y_0, z_0, t_0)$. Razele de lumină sînt generatoarele acestui ipercon Evenimentele admise, pentru care $v \leqslant c$, deci

(24) $$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 \leqslant c^2(t - t_0)^2$$

sînt reprezentate de puncte (x, y, z, t) din spaţiul cu patru dimensiuni, interioare iperconului. Spaţiul Minkowski în care interpretăm evenimentele relativiste este limitat deci la interiorul iperconului razelor de lumină.

În spaţiul 4-dimensional avem patru iperplane de referinţă. Iperplanul $t = \text{const.}$ secţionează un spaţiu tridimensional care este euclidian. Pentru acest motiv, luăm metrica spaţiului Minkowski sub forma

(25) $$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 - c^2\,dt^2.$$

Rezultă că în spaţiul Minkowski, ds^2 este negativ. Sub forma

(26) $$ds^2 = (dx^0)^2 + (dx^1)^2 + (dx^2)^2 + (dx^3)^2$$

avem o metrică euclidiană într-un spaţiu cu patru dimensiuni; $x^1 = x$, $x^2 = y$, $x^3 = z$ sînt coordonatele punctului. Punînd $x^0 = ict$, obţinem metrica relativităţii restrînse. Sub această formă, durata t corespunde unei lungimi imaginare în E_4.

În regiunea accesibilă, din interiorul iperconului (16), luînd coordonatele x, y, z, t funcţii de un parametru σ, obţinem o curbă; această traiectorie patrudimensională este imaginea mişcării punctului. Elementul de arc pe curbă este dat de (25):

$$ds^2 = -c^2\,dt^2\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) = -\frac{c^2\,dt^2}{\nu^2},$$

deci

(27) $$ds = \frac{ic}{\nu}\,dt, \qquad \frac{1}{\nu} = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}.$$

Vectorul unitar al tangentei

(28) $$\overline{T} = i\frac{d\overline{M}}{ds}$$

are mărimile proiecţiilor pe axe

$$t^0 = i\frac{c\,dt}{\frac{ic}{\nu}dt} = \nu, \quad t^1 = i\frac{dx}{ds} = i\frac{v_x dt}{\frac{ic}{\nu}dt} = \frac{\nu}{c}v_x$$

etc., deci

(29) $$t^0 = \nu,\ t^1 = \frac{\nu}{c}v_x, \quad t^2 = \frac{\nu}{c}v_y,\ t^3 = \frac{\nu}{c}v_z.$$

B. CÎMPUL ELECTROMAGNETIC

1. Masă şi energie. În mecanica relativistă *masa mobilului depinde de viteza lui*, sub forma

(1) $$m = \nu\, m_0, \qquad \frac{1}{\nu} = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}},$$

m_0 fiind masa în repaus. Pentru $v \to c$, $m \to \infty$, ceea ce este în concordanţă cu principiul că un mobil nu poate să atingă viteza luminii.

Notăm vectorul viteză prin $\bar{v}$ iar vectorul forţei acţionînd asupra punctului prin $\bar{F}$. Scriem legea Newton sub forma

(2) $$\bar{F} = \frac{d}{dt}(m\,\bar{v}),$$

adică *forţa* $\bar{F}$ *este derivata impulsului* $m\bar{v}$.

În mecanica relativistă, *energia E depinde de masa mobilului sub forma*

(3) $$E = m\,c^2.$$

b) Putem să dăm o justificare formulei (1) în modul următor. Dacă asupra mobilului nu acţionează nici o forţă, avem din legea (2), $mv = \text{const}$, adică

$$mv = m'v',$$

m' şi v' fiind masa şi viteza relative. În cazul mişcării transversale, $v' = v'_y$, am obţinut formula (16) din A.3 :

$$v_y = v'_y\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}},$$

de unde rezultă

$$m_y = \nu m'_y,$$

m_y şi m'_y fiind masa absolută şi relativă în deplasarea transversală. Dar pentru $v = 0$ rezultă $m_y = m'_y =$ masa de repaus.

Mai precis, rezultă din justificarea dată că m din formula (1) este masa mobilului într-o deplasare transversală. În mecanica relativistă, masa depinde de direcţia de deplasare, deci nu mai este o caracteristică a punctului. Acceptăm în general, prin denumirea de masă, masa m, dată de formula (1) într-o deplasare transversală.

Masa este deci o noţiune relativă.

Conceptul de masă ca o „cantitate de materie" este suplinit de m_0, masa de repaus, constantă.

c) Formal, putem să dăm de asemenea o justificare teoretică formulei (3) în modul următor. Presupunem că punctul mobil descrie o dreaptă, pe care o luăm ca axă Ox, sub acţiunea forţei $\bar{F}$, dirijată pe aceeaşi axă. Considerăm lucrul mecanic generat de forţă, de la poziţia P_1 la P_2:

(4) $$L = \int_{P_1}^{P_2} F\,dx.$$

În mişcarea de-a lungul axei Ox, formula (2) devine

$$F = \frac{d}{dt}(mv), \qquad v = \frac{dx}{dt}.$$

Transformăm integrala (4);

$$L = \int_{P_1}^{P_2}\frac{d}{dt}(mv)\,dx = \int_{P_1}^{P_2} d(mv)\frac{dx}{dt} = \int_{P_1}^{P_2} v\,d(mv) = mv^2\Big|_{P_1}^{P_2} - \int_{P_1}^{P_2} mv\,dv.$$

Ţinînd seama de (1)

$$\int mv\,dv = m_0\int\frac{v\,dv}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = -\,m_0c^2\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} = -\,mc^2\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right).$$

Deci

$$L = (m_2 - m_1)\,c^2,$$

unde m_1 şi m_2 sînt masele la capetele drumului. Dar $L = E_2 - E_1$, deci

$$E_2 - E_1 = (m_2 - m_1) c^2,$$

ceea ce concordă cu legea (3).

Să arătăm că (3) include formula uzuală a energiei cinetice: Considerăm un punct cu masa în repaus m_0, deci cu energia m_0c^2. Mişcîndu-se cu viteza v, el are masa m, dată de (1), şi energia mc^2. Creşterea energiei este energia cinetică a punctului

(5) $$T = (m - m_0)c^2 = m_0c^2(\nu - 1).$$

Cum v este mic în raport cu c, dezvoltăm în serie, neglijînd termenii de la puterea a patra:

$$\nu = \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-\frac{1}{2}} \approx 1 + \frac{v^2}{2c^2},$$

deci

(6) $$T = \frac{1}{2} m_0 v^2.$$

Relaţia (3), $E_0 = c^2 m_0$, dă *o energie enormă* datorită factorului c^2. De exemplu, pentru $m_0 = 1$ gs^2 cm^{-1}, $c = 3 \cdot 10^{10}$ cm s^{-1}, avem

$$E_0 = 9 \cdot 10^{20} \text{ ergi} = 9 \cdot 10^{20} \text{ g} \cdot \text{cm} = 9 \cdot 10^9 \text{ t} \cdot \text{km},$$

adică E_0 = nouă miliarde tone kilometri. Această imensă cantitate de energie în masa în repaus a mobilului explică fenomenele de degajarea energiei în urma descompunerii atomului.

d) Considerăm coordonatele evenimentului în spaţiul Minkowski

(7) $$x^0 = ct, \quad x^1 = x, \quad x^2 = y, \quad x^3 = z$$

ca funcţii de un parametru σ

(8) $$x^i = x^i(\sigma).$$

Vectorul T unitar al tangentei are atunci coordonatele (19) din A.5:

(9) $$t^0 = \nu, \quad t^1 = \frac{\nu}{c} v_x, \quad t^2 = \frac{\nu}{c} v_y, \quad t^3 = \frac{\nu}{c} v_z.$$

Considerăm şi energia în repaus $E_0 = m_0c^2$ şi vectorul $E_0\overline{T}$ pe care îl numim *vector energie impuls*. El are proiecţiile

(10) $$E_0t^0 = mc^2, \quad E_0t^1 = mcv_x, \quad E_0t^2 = mcv_y, \quad E_0t^3 = mcv_z.$$

e) Numim *densitatea masei* m, a particulei de volum ω, expresia $\mu(x, y, z, t)$ dată de

(11) $$\mu = \frac{dm}{d\omega}.$$

Într-o deplasare Lorentz,

$$m = \nu m_0,$$

iar volumul se modifică numai de-a lungul axei Ox, conform formulei de contracţie a lungimior $l = \frac{1}{\nu} l_0$, deci $\omega = \frac{1}{\nu}\omega_0$; atunci, considerînd şi densitatea masei în repaus, $\mu_0 = \frac{dm_0}{ds}$, avem

(12) $$\mu = \nu^2 \mu_0.$$

Fie e sarcina electrică a particulei de volum ω. Numim *densitate a sarcinii electrice* numărul $\rho(x, y, z, t)$ dat de

(13) $$\rho = \frac{de}{d\omega}.$$

Admitem, ca în fizica clasică, că sarcina electrică e este invariantă. Atunci, considerînd şi densitatea sarcinii în repaus $\rho_0 = \frac{d\rho}{d\omega_0}$, avem

(14) $$\rho = \nu \rho_0.$$

Produsul

(15) $$\overline{S} = \rho_0 \overline{T}$$

este *vectorul densitate a curentului patrudimensional*. Avem, proiectînd pe axe,

$$s^0 = \rho_0 t^0 = \nu \rho_0, \quad s^1 = \rho_0 t^1 = \frac{\nu}{c} \rho_0 v_x, \ldots$$

sau

(16) $s^0 = \rho, \; s^1 = \rho \frac{v_x}{c} \quad s^2 = \rho \frac{v_y}{c}, \; s^3 = \rho \frac{v_z}{c}.$

2. Legea Lorentz. a) Considerăm o particulă elementară, de masă m; fie $M(x, y, z)$ un punct al ei, la momentul t, care se mişcă cu viteza v, de coordonate $v_x = \frac{dx}{dt}, \ldots$ Presupunem că mişcarea are loc într-un cîmp electromagnetic, format din cîmpul electric $\bar{E}(E_x, E_y, E_z)$ şi cîmpul magnetic $\bar{H}(H_x, H_y, H_z)$ iar e este sarcina particulei. Admitem legea dată de Lorentz, că particula se mişcă sub acţiunea forţei

(1) $$\bar{F} = e\bar{E} + \frac{e}{c}\bar{v}\times\bar{H}.$$

Atunci, după legea mişcării $\bar{F} = \frac{d}{dt}(m\bar{v})$ rezultă

(2) $$\frac{d}{dt}(m\bar{v}) = e\left(\bar{E} + \frac{1}{c}\bar{v}\times\bar{H}\right);$$

proiectînd pe axe

$$\frac{d}{dt}(m\bar{v}_x) = e\left[E_x + \frac{1}{c}(v_y H_z - v_z H_y)\right],$$

(3) $$d(m\, c\, v_x) = e(E_x c\, dt + H_z\, dy - H_y\, dz).$$

b) Considerăm traiectoria patrudimensională a particulei; avem [A.5, (27)]

$$ds = ic\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}\,dt.$$

Punem

$$x^0 = c\,t, \quad x^1 = x, \quad x^2 = y, \; x^3 = z.$$

Vectorul tangent $\bar{T}$ are coordonatele

$$t^0 = \nu, \quad t^1 = \frac{1}{c}\nu v_x, \ldots, \; \nu = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

şi vectorul $E_0\bar{T}$, unde $E_0 = m_0 c^2$ este energia cinetică în repaus, are proiecţiile

(4) $$E_0 t^0 = m\,c^2, \quad E_0 t^1 = m\,c\,v_x, \ldots$$

Ecuaţiile (3) devin

(5) $$d(E_0 t^1) = e(E_x\, dx^0 + H_z\, dx^2 - H_y\, dx^3)$$

şi analoagele.

c) Obţinem o relaţie corespunzătoare în $E_0 t^0$ din următoarele consideraţii. Scriem că variaţia energiei este lucrul mecanic elementar

$$d(m\,c^2) = F_x\, dx + F_y\, dy + F_z\, dz;$$

dar, conform cu (1), componenta $\bar{v}\times\bar{H}$ a lui $\bar{F}$, fiind perpendiculară pe $\bar{v}$, deci pe direcţia mişcării, are un lucru mecanic nul; rezultă, ţinînd seama şi de (4)

(6) $$d(E_0 t^0) = e(E_x dx^1 + E_y\, dx^2 + E_z\, dx^3).$$

3. Tensorul electromagnetic. a) Considerăm coordonatele covariante. Fiind dată metrica

(1) $$ds^2 = g_{ij} dx^i dx^j$$

trecem de la coordonatele contravariante V^i ale unui vector $\bar{V}$ la coordonatele covariante V_i, prin formulele

(2) $$V_i = g_{ij} V^j.$$

În cazul metricii (1)

(3) $$ds^2 = -(dx^0)^2 + (dx^1)^2 + (dx^2)^2 + (dx^3)^2$$

avem

(4) $$V_0 = g_{0i} V^i = -V^0, \qquad V_i = g_{ij} V^j = g_{ii} V^i = V^i \quad (i, j \neq 0),$$

adică

(5) $$x_0 = -x^0, \quad x_1 = x^1, \quad x_2 = x^2, \quad x_3 = x^3;$$

de asemenea

$$t_0 = -t^0, \quad t_1 = t^1, \ \ldots$$

b) Putem să scriem deci formulele Lorentz sub forma

(6) $$\begin{aligned} d(E_0 t_0) &= e(\qquad\quad - E_x dx^1 - E_y dx^2 - E_z\, dx^3), \\ d(E_0 t_1) &= e(E_x dx^0 \qquad\quad + H_z dx^2 - H_y\, dx^3) \end{aligned}$$

şi analoagele; sau, concentrat,

(7) $$d(E_0 t_i) = e F_{ij}\, dx^j$$

($i, j = 0, 1, 2, 3$) şi unde F_{ij} sînt componentele cîmpului electromagnetic $\bar{F}$, date prin matricea

(8) $$(F_{ij}) = \begin{pmatrix} F_{00} & F_{01} & F_{02} & F_{03} \\ F_{10} & F_{11} & F_{12} & F_{13} \\ F_{20} & F_{21} & F_{22} & F_{23} \\ F_{30} & F_{31} & F_{32} & F_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -E_x & -E_y & -E_z \\ E_x & 0 & H_z & -H_y \\ E_y & -H_z & 0 & H_x \\ E_z & H_y & -H_x & 0 \end{pmatrix}$$

Rezultă

(9) $$F_{ij} = -F_{ji};$$

tot din (7) rezultă că F_{ij} au caracter tensorial.

Structura (8) este lesne de justificat, punînd

(10) $$\begin{aligned} F_{10} &= E_x, \quad F_{20} = E_y, \quad F_{30} = E_z, \\ F_{23} &= H_x, \quad F_{31} = H_y, \quad F_{12} = H_z. \end{aligned}$$

4. Ecuaţiile Maxwell. a) Din consideraţii fizice, admitem relaţiile date de James Clerk Maxwell în 1860; anume că

între cîmpul electric $\bar{E}$ şi cîmpul magnetic $\bar{H}$ avem relaţiile

(1) $$\operatorname{div} \bar{H} = 0, \quad \operatorname{rot} \bar{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \bar{H}}{\partial t},$$

(2) $$\operatorname{div} \bar{E} = 4\pi\rho, \quad \operatorname{rot} \bar{H} = \frac{1}{c}\frac{\partial \bar{E}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c}\rho\bar{v},$$

unde ρ este densitatea sarcinii electrice.

Ne propunem să scriem relaţiile Maxwell sub formă tensorială.

b) Considerăm prima relaţie

(3) $$\frac{\partial H_x}{\partial x} + \frac{\partial H_y}{\partial y} + \frac{\partial H_z}{\partial z} = 0;$$

conform tabelului (3.10) şi punînd $x^0 = c\,t$, $x^1 = x$, $x^2 = y$, $x^3 = z$, relaţia (3) devine

(4) $$\frac{\partial F_{23}}{\partial x^1} + \frac{\partial F_{31}}{\partial x^2} + \frac{\partial F_{12}}{\partial x^3} = 0.$$

Considerăm a doua relaţie (1), anume

$$\begin{vmatrix} \bar{I} & \bar{J} & \bar{K} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ E_x & E_y & E_z \end{vmatrix} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \bar{H}}{\partial t}$$

unde $\bar{I}$, $\bar{J}$, $\bar{K}$ sînt versorii axelor x, y, z; proiectăm pe Ox,

(5) $$\frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} = -\frac{1}{c}\frac{\partial H_x}{\partial t}$$

şi analoagele. Cu acelaşi tabel (3.10) scriem

(6) $$\frac{\partial F_{30}}{\partial x^2} - \frac{\partial F_{20}}{\partial x^3} = -\frac{\partial F_{23}}{\partial x^0}, \quad \frac{\partial F_{23}}{\partial x^0} + \frac{\partial F_{30}}{\partial x^2} + \frac{\partial F_{02}}{\partial x^3} = 0$$

şi analoagele. Deci putem să scriem simetric ecuaţiile (4) şi (6) care exprimă şirul (1) de relaţii Maxwell sub forma

(7) $$\frac{\partial F_{ij}}{\partial x^k} + \frac{\partial F_{jk}}{\partial x^i} + \frac{\partial F_{ki}}{\partial x^j} = 0$$

$(i,\ j,\ k = 0,\ 1,\ 2,\ 3)$ sau, cu notaţia

(8) $$\Delta_{ijk} = \frac{\partial F_{ij}}{\partial x^k} + \frac{\partial F_{jk}}{\partial x^i} + \frac{\partial F_{ki}}{\partial x^j}$$

avem

(9) $$\Delta_{ijk} = 0.$$

c) Considerăm prima ecuaţie din grupul (2)

(10) $$\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} = 4\pi\rho$$

sau

(11) $$\frac{\partial F_{10}}{\partial x^1} + \frac{\partial F_{20}}{\partial x^2} + \frac{\partial F_{30}}{\partial x^3} = 4\pi\rho.$$

A doua ecuaţie din grup

(12) $$\frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z} - \frac{1}{c}\frac{\partial E_x}{\partial t} = \frac{4\pi}{c}\rho v_x$$

şi analoagele, devine cu formulele (1.16)

(13) $$\frac{\partial F_{12}}{\partial x^2} + \frac{\partial F_{13}}{\partial x^3} - \frac{\partial F_{10}}{\partial x^0} = 4\pi\, s^1$$

şi analoagele.

d) Să trecem la componentele contravariante ale tensorului electromagnetic. Pentru metrica riemanniană $ds^2 = g_{ij}dx^i\,dx^j$, între componentele covariante şi contravariante ale unui tensor de speţa a doua avem relaţia

$$F_{pq} = g_{pi}g_{qj}F^{ij}$$

Deci

$$F_{00} = g_{0i}g_{0j}F^{ij} = F^{00},$$

(14) $$F_{01} = g_{0i}g_{1j}F^{ij} = -F^{01},$$

$$F_{12} = g_{1i}g_{2j}F^{ij} = F^{12}$$

etc. Ecuaţiile (10) şi (13) devin

(15) $$\frac{\partial F^{01}}{\partial x^1} + \frac{\partial F^{02}}{\partial x^2} + \frac{\partial F^{03}}{\partial x^3} = 4\pi s^0,$$

(16) $$\frac{\partial F^{10}}{\partial x^0} + \frac{\partial F^{12}}{\partial x^2} + \frac{\partial F^{13}}{\partial x^3} = 4\pi\, s^1$$

şi analoagele; sau, sub formă concentrată

(17) $$\frac{\partial F^{ij}}{\partial x^j} = 4\pi s^i.$$

e) Forma sub care am scris relaţiile Maxwell este tensorială. În adevăr, spaţiul pseudoeuclidian fiind fără curbură şi fără torsiune, derivatele covariante coincid cu derivatele ordinare; deci F_{ij} fiind un tensor arbitrar, şi

$$F_{ij;\,k} = \frac{\partial F_{ij}}{\partial x^k}$$

are caracter tensorial. În particular,

(18) $$\Delta_{ijk} = \frac{\partial F_{ij}}{\partial x^k} + \frac{\partial F_{jk}}{\partial x^i} + \frac{\partial F_{ki}}{\partial x^j}$$

$(i,\ j,\ k = 0,\ 1,\ 2,\ 3)$ sînt componentele unui tensor; mai precis, la o transformare

$$x'^i = a^i_j x^j$$

avem

(19) $$\Delta'_{ijk} = \Delta_{lmn}a^l_i a^m_j a^n_k.$$

De asemenea, avem vectorul obţinut prin contractarea

(20) $$f^i = \frac{\partial F^{ij}}{\partial x^j}$$

adică

(21) $$f'^i = f^l a^i_l.$$

Dacă Δ_{ijk}, patru la număr, sînt toate nule, ele rămîn nule. Ecuaţiile

(22) $$\Delta_{123} = 0,\quad \Delta_{012} = 0,\quad \Delta_{023} = 0,\quad \Delta_{031} = 0$$

formează primul șir de ecuații Maxwell, iar

$$f^0 = \varphi^0, \quad f^1 = \varphi^1, \quad f^2 = \varphi^2, \quad f^3 = \varphi^3 \tag{23}$$

φ^i fiind un vector contravariant, formează șirul al doilea.

Deci *relațiile Maxwell sînt invariante în transformările Lorentz.*

Lorentz a obținut transformările lui tocmai din această condiție, fără să se sesizeze atunci importanța lor. Ecuațiile Maxwell apăreau contradictorii, ca defectuoase față de grupul Galilei.

5. Transformarea cîmpului electromagnetic. a) Cîmpul electromagnetic $\overline{F}$ are componentele covariante F_{ij} date de

$$\begin{aligned} &F_{10} = E_x, \quad F_{20} = E_y, \quad E_{30} = E_z, \\ &F_{23} = H_x, \quad F_{31} = H_y, \quad F_{12} = H_z, \end{aligned} \tag{1}$$

unde $\overline{E}(E_x, E_y, E_z)$ și $\overline{H}(H_x, H_y, H_z)$ sînt cîmpurile electric și magnetic.

La o schimbare de reper

$$x^i = a^i_j x'^j$$

componentele tensorului se modifică după legea

$$F'_{pq} = \frac{\partial x^i}{\partial x'^p} \frac{\partial x^j}{\partial x'^q} F_{ij} = a^i_p a^j_q F_{ij}.$$

Considerăm o transformare Lorentz

$$ct = ct' \operatorname{ch}\alpha + x' \operatorname{sh}\alpha, \quad x = ct' \operatorname{sh}\alpha + x' \operatorname{ch}\alpha, \ y = y', \quad z = z' \tag{2}$$

sau, cu

$$x^0 = ct, \quad x^1 = x, \quad x^2 = y, \quad x^3 = z$$

scriem

$$x^0 = x'^0 \operatorname{ch}\alpha + x'^1 \operatorname{sh}\alpha, \quad x^1 = x'^0 \operatorname{sh}\alpha + x^1 \operatorname{ch}\alpha, \quad x^2 = x'^2, \quad x^3 = x'^3. \tag{3}$$

de matrice

$$(a^i_j) = \begin{pmatrix} a^0_0 & a^0_1 & a^0_2 & a^0_3 \\ a^1_0 & a^1_1 & a^1_2 & a^1_3 \\ a^2_0 & a^2_1 & a^2_2 & a^2_3 \\ a^3_0 & a^3_1 & a^3_2 & a^3_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \operatorname{ch}\alpha & \operatorname{sh}\alpha & 0 & 0 \\ \operatorname{sh}\alpha & \operatorname{ch}\alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{4}$$

Avem deci

$$\begin{aligned} E'_x &= F'_{10} = a^i_1 a^j_0 F_{ij} = a^1_1 a^0_0 F_{10} + a^0_1 a^1_0 F_{01} = \\ &= \operatorname{ch}^2\alpha\, E_x - \operatorname{sh}^2\alpha E_x = E_x, \\ E'_y &= F'_{20} = a^i_2 a^j_0 F_{ij} = a^2_2 a^0_0 F_{20} + a^2_2 a^1_0 F_{21} = \\ &= \operatorname{ch}\alpha\, E_y - \operatorname{sh}\alpha\, H_z, \\ E'_y &= F'_{30} = a^i_3 a^j_0 F_{ij} = a^3_3 a^0_0 F_{30} + a^3_3 a^1_0 F_{31} = \\ &= \operatorname{ch}\alpha E_z + \operatorname{sh}\alpha\, H_y, \\ H'_x &= F'_{23} = a^i_2 a^j_3 F_{ij} = a^2_2 a^3_3 F_{23} = H_x. \\ H'_y &= F'_{31} = a^i_3 a^j_1 F_{ij} = a^3_3 a^0_1 F_{30} + a^3_3 a^1_1 F_{31} = \\ &= \operatorname{sh}\alpha\, E_z + \operatorname{ch}\alpha\, H_y, \\ H'_z &= F'_{12} = a^i_1 a^j_2 F_{ij} = a^0_1 a^2_2 F_{02} + a^1_1 a^2_2 F_{12} = \\ &= -\operatorname{sh}\alpha\, E_y + \operatorname{ch}\alpha H_z. \end{aligned}$$

În concluzie

$$\begin{aligned} &E'_x = E_x, E'_y = \operatorname{ch}\alpha\, E_y - \operatorname{sh}\alpha H_z, E'_z = \operatorname{ch}\alpha\, E_z + \operatorname{sh}\alpha\, H_y, \\ &H'_x = H_x, H'_y = \operatorname{sh}\alpha\, E_z + \operatorname{ch}\alpha\, H_y, H'_z = -\operatorname{sh}\alpha\, E_y + \operatorname{ch}\alpha H_z. \end{aligned} \tag{5}$$

b) Cu ajutorul formulelor de transformare (5) putem să verificăm unele proprietăți ale cîmpului electromagnetic.

De exemplu, să arătăm că *între cîmpul electric $\overline{E}$ și magnetic $\overline{H}$ avem relațiile*

$$E \cdot H = \text{const}, \tag{6}$$

$$E^2 - H^2 = \text{const}. \tag{7}$$

Într-adevăr

$$\begin{aligned} E' \cdot H' &= E'_x H'_x + E'_y H'_y + E'_z H'_z = \\ &= E_x H_x + (\operatorname{ch}\alpha E_y - \operatorname{sh}\alpha\, H_z)(\operatorname{sh}\alpha\, E_z + \operatorname{ch}\alpha\, H_y) + \\ &+ (\operatorname{ch}\alpha\, E_z + \operatorname{sh}\alpha\, H_y)(-\operatorname{sh}\alpha E_y + \operatorname{ch}\alpha\, H_z) = \\ &= E_x H_x + E_y H_y + E_z H_z = E \cdot H. \end{aligned}$$

De asemenea

$$E'^2 - H'^2 = E_x'^2 + E_y'^2 + E_z'^2 - H_x'^2 - H_y'^2 - H_z'^2 =$$

$$E_x^2 - H_x^2 + (\mathrm{ch}_\alpha E_y - \mathrm{sh}\alpha H_z)^2 - (-\mathrm{sh}\alpha E_y + \mathrm{ch}\alpha H_z)^2 +$$

$$+ (\mathrm{ch}\alpha E_z + \mathrm{sh}\alpha H_y)^2 - (-\mathrm{sh}\alpha E_z + \mathrm{ch}\alpha H_y)^2 =$$

$$= E_x^2 + E_y^2 + E_z^2 - H_x^2 - H_y^2 - H_z^2 = E^2 - H^2.$$

c) Presupunem că în sistemul inițial

(8) $$\bar{H} = 0, \quad \bar{E} = -\mu \operatorname{grad} \frac{1}{r},$$

unde $\bar{r}$ este vectorul de poziție și μ un coeficient. Avem explicit

(9) $$H_x = H_y = H_z = 0, \; E_x = \mu \frac{x}{r^3}, \quad E_y = \mu \frac{y}{r^3}, \quad E_z = \mu \frac{z}{r^3}.$$

După o transformare Lorentz, prin formulele (5), avem

(10) $$H_x' = 0, \; H_y' = \mu \, \mathrm{sh}\alpha \frac{z}{r^3}, \quad H_z' = -\mu \mathrm{ch}\alpha \frac{y}{r^3}.$$

Mărimea cîmpului magnetic generat de curent în mișcare este

(11) $$H' = \sqrt{H_x'^2 + H_y'^2 + H_z'^2} = H \, \mathrm{sh}\, \alpha \frac{\sqrt{y^2 + z^2}}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}$$

Pentru viteze v, mici,

$$\mathrm{sh}\alpha \to \mathrm{th}\alpha \to \frac{v}{c}.$$

Obținem *formula Biot-Savart*, relativă la cîmpul electromagnetic generat de un curent mobil,

(12) $$H' = \frac{\mu}{c} \frac{\sin\theta}{r^2} v,$$

unde θ este unghiul format de raza vectoare cu axa Ox a mișcării.

II. TEORIA RELATIVITĂȚII GENERALE

C. ECUAȚIILE EINSTEIN

1. Forma complementară. a) În cazul relativității generale avem o *metrică riemanniană*, adică de forma

(1) $$ds^2 = g_{ij} dx^i dx^j \quad (i, j = 0, 1, 2, 3).$$

În teoria relativității este obișnuit să se noteze tensorul fundamental al spațiului riemannian prin g_{ij}; evident, g_{ij} sînt funcții de coordonatele x^0, x^1, x^2, x^3 dar în cazuri particulare pot să fie funcții de o parte dintre coordonate sau chiar constante.

O primă ipoteză la baza teoriei relativității generale este aceea că *într-o primă aproximație, metrica* (1) *are forma relativității restrînse*

(2) $$ds^2 = -(dx^0)^2 + (dx^1)^2 + (dx^2)^2 + (dx^3)^2 = \mathring{g}_{ij} dx^i dx^j,$$

unde

(3) $$\mathring{g}_{ij} = 0 (i \neq j), \quad \mathring{g}_{00} = -1, \quad \mathring{g}_{\alpha\alpha} = 1,$$
$$(i, j, \ldots = 0, 1, 2, 3; \; \alpha, \beta \ldots = 1, 2, 3).$$

Există deci un sistem de coordonate în care forma (1) să devină

(4) $$ds^2 = -(dx^0)^2 + (dx^1)^2 + (dx^2)^2 + (dx^3)^2 + \gamma_{ij} dx^i dx^j;$$

$\gamma_{ij} dx^i dx^j$ este o *formă pătratică complementară*, cu coeficienții funcții de x^i, de modul foarte mic, în raport cu unitatea, ceea ce scriem sub forma

(5) $$|\gamma_{ij}| \ll 1.$$

Avem atunci

(6) $$g_{ij} = \mathring{g}_{ij} + \gamma_{ij}.$$

Metrica (2) este păstrată într-o transformare pseudoortogonală.

b) Considerăm transformarea infinitezimală

(7) $$x'^i = x^i + \xi^i(x^0, x^1, x^2, x^3);$$

spunem că transformarea este infinitezimală, în sensul că

$$\left|\frac{\partial \xi^i}{\partial x^j}\right| \ll 1. \tag{8}$$

Vom arăta că transformarea (7) păstrează forma (4). Avem din (7) şi

$$x^i = x'^i + \xi'^i(x'^0, x'^1, x'^2, x'^3), \quad \left|\frac{\partial \xi'^i}{\partial x'^j}\right| \ll 1.$$

Deci

$$\mathrm{d}x^i = \mathrm{d}x'^i + \frac{\partial \xi'^i}{\partial x'^j}\mathrm{d}x'^j$$

şi

$$\mathrm{d}s^2 = -(\mathrm{d}x^0)^2 + (\mathrm{d}x^1)^2 + (\mathrm{d}x^2)^2 + (\mathrm{d}x^3)^2 + \gamma_{ij}\,\mathrm{d}x^i\,\mathrm{d}x^j =$$

$$= -(\mathrm{d}x'^0)^2 + (\mathrm{d}x'^1)^2 + (\mathrm{d}x'^2)^2 + (\mathrm{d}x'^3)^2 + \gamma'_{ij}\,\mathrm{d}x'^i\,\mathrm{d}x'^j,$$

unde

$$\gamma'_{ij} = \gamma_{ij} \pm 2\frac{\partial \xi'^i}{\partial x'^j} + \{2\},$$

deci satisfac condiţiei

$$|\gamma'_{ij}| \ll 1.$$

În cele ce urmează, considerăm coordonate apropiate acelora care păstrează forma (2).

2. Ecuaţiile Einstein. a) A doua ipoteză de bază în teoria relativităţii generale este aceea că *tensorul* T^{ij} care dă răspîndirea şi mişcarea energiei în spaţiu *decurge din geometria acestui spaţiu* şi anume este dat de *ecuaţiile Einstein*

$$-\varkappa T_{ij} = R_{ij} - \frac{1}{2}Rg_{ij}, \tag{1}$$

unde T_{ij} sînt componentele covariante ale tensorului energiei T^{ij}, R^{ij} sînt simbolurile Ricci, R invariantul Ricci, obţinuţi din tensorul de curbură R^h_{ilj} prin contractare

$$R_{ij} = R^l_{ilj}, \quad R = g^{ij}R_{ij} = R^i_i$$

iar $\varkappa$ o constantă pozitivă. Rezultă că tensorul energie T_{ij} este simetric.

Tensorul energie impuls T_{ij} este determinat de distribuţia maselor. Cîmpul electromagnetic F_{ij} nu influenţează proprietăţile spaţiului şi timpului în teoria relativităţii generale.

b) Justificarea teoretică a ecuaţiilor Einstein este următoarea. Plecăm de la identităţile Bianchi

$$R^a_{ijk,l} + R^a_{ikl,j} + R^a_{ilj,k} = 0.$$

Facem $a = j$ şi avem $R_{ik,l} + R^j_{ikl,j} - R_{il,k} = 0$; contractăm cu g^{im} şi obţinem $R^m_{k,l} + g^{im}R^j_{ikl,j} - R^m_{l,k} = 0$; punem $m = l$;

$$R^l_{k,l} + R^j_{k,j} - R_{,k} = 0$$

sau

$$R_{,k} = 2R^l_{k,l}. \tag{2}$$

Considerăm tensorul

$$R^*_{ij} = R_{ij} - \frac{1}{2}Rg_{ij}; \tag{3}$$

contractăm cu g^{im} şi obţinem $R^{*m}_j = R^m_j - \frac{1}{2}R\delta^m_j$; derivăm covariant în raport cu x^m:

$$R^{*m}_{j,m} = R^m_{j,m} - \frac{1}{2}R_{,j} = 0.$$

Ridicăm indicele, înmulţind cu g^{jk}:

$$g^{jk}R^{*m}_j = R^{*km};$$

deci

$$R^{*km}_{,m} = 0. \tag{4}$$

Avem însă şi

$$T^{km}_{,m} = 0 \tag{5}$$

relaţie care exprimă legea conservării energiei.

Este natural să luăm, în modul cel mai simplu, pe T^{km} proporţionali cu R^{*km}, de unde, trecem la coordonatele covariante, ţinînd seama de (3).

c) Dacă înmulţim ecuaţiile (1) cu g^{im} şi apoi sumăm în raport cu i, obţinem

$$(6) \qquad -\varkappa T_j^m = R_j^m - \frac{1}{2} R\delta_j^m ;$$

facem $m = j$, ţinem seama că $\delta_j^j = \delta_0^0 + \delta_1^1 + \delta_2^2 + \delta_3^3 = 4$ şi notăm

$$(7) \qquad T_{ij}g^{ij} = T, \quad R_{ij}g^{ij} = R ;$$

obţinem

$$(8) \qquad R = \varkappa T$$

şi din (1) avem şi relaţia simetrică cu ea,

$$(9) \qquad R_{ij} = -\varkappa\left(T_{ij} - \frac{1}{2} Tg_{ij}\right).$$

3. Geodezicele în relativitatea generală. a) În teoria relativităţii generale presupunem că tensorul energie impuls T^{ij} este datorit cîmpului gravitaţional, care se manifestă prin coeficienţii g_{ij} ai metricii, deci este caracterizat prin comportarea liniilor geodezice

$$(1) \qquad \frac{d^2x^k}{ds^2} + \begin{Bmatrix} k \\ i \quad j \end{Bmatrix} \frac{dx^i}{ds}\frac{dx^j}{ds} = 0.$$

Liniile geodezice se deosebesc cu atît mai mult de drepte, cu cît cîmpul gravitaţional este mai puternic.

Prin ecuaţiile Einstein

$$(2) \qquad -\varkappa T_{ij} = R_{ij} - \frac{1}{2} Rg_{ij},$$

tensonul energie impuls T^{ij} depinde de metrică.

b) Studiem cîmpul gravitaţional într-un sistem de coordonate x^i pentru care metrica este apropiată de aceea a relativităţii restrînse

$$(3) \qquad ds^2 = \mathring{g}_{ij}\, dx^i\, dx^j = -(dx^0)^2 + (dx^1)^2 + (dx^2)^2 + (dx^3)^2.$$

sau

$$(4) \qquad g_{ij} = \mathring{g}_{ij} + \gamma_{ij} ;$$

admitem că γ_{ij}, $\dfrac{\partial\gamma_{ij}}{\partial x^k}$, $\dfrac{\partial^2\gamma_{ij}}{\partial x^k\partial x^l}$ sînt neglijabile în comparaţie cu unitatea (deci cu termenii finiţi).

Coeficienţii conexiunii metricii (3) sînt daţi de

$$(5) \qquad \begin{Bmatrix} k \\ i \quad j \end{Bmatrix} = g^{kl}(ijl),$$

unde

$$(6) \qquad (ijl) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{li}}{\partial x^j} + \frac{\partial g_{lj}}{\partial x^i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^l}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \gamma_{li}}{\partial x^j} + \frac{\partial \gamma_{lj}}{\partial x^i} - \frac{\partial \gamma_{ij}}{\partial x^l}\right),$$

deci (ijl) sînt infinitezimali de primul ordin; rezultă că în (5) putem să înlocuim pe g^{kl} prin $\mathring{g}^{kl}$. Atunci

$$(7) \qquad \begin{Bmatrix} k \\ i \quad j \end{Bmatrix} = g^{kl}(ijl) = \pm\,(ijk)\begin{cases} + & \text{pentru } k = 1, 2, 3, \\ - & \text{pentru } k = 0. \end{cases}$$

c) Ecuaţiile diferenţiale ale geodezicelor

$$(8) \qquad \frac{d^2x^0}{d\sigma^2} - (ij0)\frac{dx^i}{d\sigma}\frac{dx^j}{d\sigma} = 0,$$

$$(9) \qquad \frac{d^2x^\alpha}{d\sigma^2} + (ij\alpha)\frac{dx^i}{d\sigma}\frac{dx^j}{d\sigma} = 0,$$

unde $\alpha = 1, 2, 3$; $x^0 = ct$, $x^1 = x$, $x^2 = y$, $x^3 = z$; $\sigma = is$ (ca să avem parametru real); deci, după (26) din A.5

$$(10) \qquad d\sigma = i\, ds = \frac{c}{\nu}\, dt, \quad \frac{1}{\nu} = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}.$$

Atunci

$$\frac{dx^0}{d\sigma} = \nu, \quad \frac{dx^1}{d\sigma} = \frac{\nu}{c}\frac{dx}{dt}, \ \ldots$$

şi neglijînd termenii de ordin superior,

(11) $$d\sigma \approx c\,dt,\quad \frac{dx^0}{d\sigma}\approx 1,\quad \frac{dx^1}{d\sigma}\approx \frac{1}{c}\frac{dx}{dt}$$

etc. Apoi

$$\frac{d^2x^\alpha}{(dx^0)^2} = \frac{\frac{d^2x^\alpha}{d\sigma^2}\frac{dx^0}{d\sigma} - \frac{d^2x^0}{d\sigma^2}\frac{dx^\alpha}{d\sigma}}{\left(\frac{dx^0}{d\sigma}\right)^2} \approx \frac{d^2x^\alpha}{d\sigma^2} - \frac{d^2x^0}{d\sigma^2}\frac{dx^\alpha}{d\sigma}.$$

Înlocuim, ţinînd seama de (8), (9)

$$\frac{d^2x^\alpha}{(dx^0)^2} = -(ij\alpha)\frac{dx^i}{d\sigma}\frac{dx^j}{d\sigma} - (ij0)\frac{dx^i}{d\sigma}\frac{dx^j}{d\sigma}\frac{dx^\alpha}{d\sigma}.$$

Neglijăm produsele

$$\frac{dx^\alpha}{d\sigma}\frac{dx^\beta}{d\sigma}\approx\frac{1}{c^2}\frac{dx^\alpha}{dt}\frac{dx^\beta}{dt}$$

şi analoagele, de ordinul al doilea; avem

$$\frac{d^2x^\alpha}{(dx^0)^2} = -(00\alpha)\frac{dx^0}{d\sigma}\frac{dx^0}{d\sigma} - 2(\beta0\alpha)\frac{dx^\beta}{d\sigma}\frac{dx^0}{d\sigma} - (000)\left(\frac{dx^0}{d\sigma}\right)^2\frac{dx}{d\sigma};$$

iar din (11) şi (6)

$$\frac{1}{c^2}\frac{d^2x^\alpha}{dt^2} = -\left(\frac1c\frac{\partial\gamma_{\alpha0}}{\partial t} - \frac12\frac{\partial\gamma_{00}}{\partial x^\alpha}\right) - \frac{1}{2c^2}\frac{\partial\gamma_{00}}{\partial t}\frac{dx^\alpha}{dt} - \left(\frac1c\frac{\partial\gamma_{\alpha\beta}}{\partial t} + \frac{\partial\gamma_{\alpha\beta}}{\partial x^\beta} - \frac{\partial\gamma_{\beta\alpha}}{\partial x^\alpha}\right)\frac1c\frac{dx^\beta}{dt};$$

deci

(12) $$\frac{d^2x^\alpha}{dt^2} = -c\frac{\partial\gamma_{0\alpha}}{\partial t} + \frac{c^2}{2}\frac{\partial\gamma_{00}}{\partial x^\alpha} - \frac{\partial\gamma_{\alpha\beta}}{\partial t}\frac{dx^\beta}{dt} + c\left(\frac{\partial\gamma_{\beta0}}{\partial x^\alpha} - \frac{\partial\gamma_{\alpha0}}{\partial x^\beta}\right)\frac{dx^\beta}{dt} - \frac12\frac{\partial\gamma_{00}}{\partial t}\frac{dx^\alpha}{dt}.$$

4. Problema fundamentală a relativităţii generale. a) Avem ecuaţiile Einstein

(1) $$-\varkappa T_{ij} = R_{ij} - \frac12 Rg_{ij}$$

sau

(2) $$R_{ij} = -\varkappa\left(T_{ij} - \frac12 Tg_{ij}\right).$$

Calculăm simbolurile Riemann de prima speţă

$$R_{ijkl} = \frac12\left(\frac{\partial^2 g_{il}}{\partial x^j\partial x^k} + \frac{\partial^2 g_{jk}}{\partial x^i\partial x^l} - \frac{\partial^2 g_{jl}}{\partial x^i\partial x^k} - \frac{\partial^2 g_{ik}}{\partial x^j\partial x^l}\right) + g^{rs}[(jkr)(ils) - (jlr)(iks)].$$

Neglijăm produsele din ultima paranteză, fiind de ordinul al doilea, conform cu (6) din 3. Rezultă

(3) $$R_{ijkl} = \frac12\left(\frac{\partial^2\gamma_{il}}{\partial x^j\partial x^k} + \frac{\partial^2\gamma_{jk}}{\partial x^i\partial x^l} - \frac{\partial^2\gamma_{jl}}{\partial x^i\partial x^k} - \frac{\partial^2\gamma_{ik}}{\partial x^j\partial x^l}\right).$$

Contractînd cu g^{il} şi punînd $g^{il}\sim\mathring{g}^{il}$, obţinem

(4) $$R_{jk}\sim R_{ijkl}\mathring{g}^{il} = \frac12\left(\Box\gamma_{jk} + \frac{\partial^2\gamma}{\partial x^j\partial x^k} - \frac{\partial^2\gamma^i_j}{\partial x^i\partial x^k} - \frac{\partial^2\gamma^l_k}{\partial x^j\partial x^l}\right),$$

unde

(5) $$\Box = -\frac{\partial^2}{(\partial x^0)^2} + \frac{\partial^2}{(\partial x^1)^2} + \frac{\partial^2}{(\partial x^2)^2} + \frac{\partial^2}{(\partial x^3)^2},$$

(6) $$\gamma = \gamma_{il}\mathring{g}^{il},\quad \gamma^l_j = \gamma_{ji}\mathring{g}^{il}.$$

b) Fizic, cunoaştem tensorul energie impuls T^{ij}; înlocuim în (4) pe R_{jk} din (2). Obţinem un sistem de zece ecuaţii cu derivate parţiale de al doilea ordin, pentru zece funcţii necunoscute γ_{ij} (x^0, x^1, x^2, x^3). Odată cu γ_{ij} este cunoscută metrica ds^2, deci toate proprietăţile geometrice ale spaţiului, care sînt şi proprietăţi fizice.

Mecanica devine astfel un capitol de geometrie.

Dar sistemul (4) nu este rezolvat pînă acum. Simplificăm problema făcînd unele presupuneri suplimentare, compatibile cu realitatea fizică, pentru care rezolvarea matematică este posibilă. Înainte de a trece la acest capitol, vom arăta că mecanica clasică este subordonată acestui fel de a pune problema.

5. Cazul newtonian. a) Ipotezele simplificatoare în acest caz sînt: γ_{ij} nu depind de timp, adică sînt *staționare:*

(1) $$\gamma_{ij} = \gamma_{ij}(x^1, x^2, x^3);$$

γ_{ij} și derivatele lor se anulează pentru $r \to \infty$, r fiind raza vectoare OM;

tensorul energie are o singură componentă diferită de zero, anume

(2) $$T_{00} = \mu c^2, \quad T_{ij} = 0 \quad (i \neq j),$$

μ fiind densitatea masei.

În fond, conform formulei energiei

$$T^{00} = \mu c^2;$$

iar

$$T_{00} = g_{0i} g_{0j} T^{ij} = \overset{0}{g}_{0i} \overset{0}{g}_{0j} T^{ij} = \overset{0}{g}_{00} \overset{0}{g}_{00} T^{00} = T^{00}.$$

Avem

(3) $$T = g^{ij} T_{ij} = g^{00} T_{00} = -\mu c^2$$

și

(4) $$T_{ij} - \frac{1}{2} T g_{ij} \approx \begin{cases} 0 & \text{pentru } i \neq j \\ \frac{1}{2} \mu c^2 & \text{pentru } i = j. \end{cases}$$

Rezultă

(5) $$R_{ij} = 0, \quad R_{ii} = -\frac{\varkappa}{2} \mu c^2.$$

b) Pentru $i = \alpha$ ($\alpha = 1, 2, 3$), $j = 0$ avem $R_{\alpha 0} = 0$ și operatorul $\square$ se reduce la laplacianul Δ; iar după (4.4), pentru $j = \alpha$, $k = 0$, ținînd seama de faptul că γ nu depinde de x^0, avem

$$\Delta \gamma_{\alpha 0} = \frac{\partial^2 \gamma_0^l}{\partial x^\alpha \partial x^l}.$$

Derivăm în raport cu x^β, apoi schimbăm pe α, β între ei și scădem; avem

$$\frac{\partial}{\partial x^\beta} \Delta \gamma_{\alpha 0} - \frac{\partial}{\partial x^\alpha} \Delta \gamma_{\beta 0} = 0$$

sau

(6) $$\Delta \left(\frac{\partial \gamma_{\alpha 0}}{\partial x^\beta} - \frac{\partial \gamma_{\beta 0}}{\partial x^\alpha} \right) = 0.$$

Deci expresia din paranteză este o funcție armonică; dar dacă o funcție este nulă pe un contur și armonică în domeniul interior, atunci ea este identic nulă.

Am presupus că γ_{ij}, $\frac{\partial \gamma_{ij}}{\partial x^k}$ tind către zero, pentru $r \to \infty$, r fiind lungimea razei vectoare. Atunci ecuația (6) admite soluția

(7) $$\frac{\partial \gamma_{\alpha 0}}{\partial x^\beta} = \frac{\partial \gamma_{\beta 0}}{\partial x^\alpha}.$$

Pe de altă parte, ecuațiile (12) din § 3 devin în cazul staționar

$$\frac{d^2 x^\alpha}{dt^2} = \frac{c^2}{2} \frac{\partial \gamma_{00}}{\partial x^\alpha} + c \left(\frac{\partial \gamma_{\beta 0}}{\partial x^\alpha} - \frac{\partial \gamma_{\alpha 0}}{\partial x^\beta} \right)$$

și prin relația (7),

(8) $$\frac{d^2 x^\alpha}{dt^2} = \frac{c^2}{2} \frac{\partial \gamma_{00}}{\partial x^\alpha}.$$

c) După (5) avem $R_{00} = -\frac{\varkappa}{2} \mu c^2$, iar din (4.4)

(9) $$\Delta \gamma_{00} = -\varkappa \mu c^2.$$

Am obținut pentru γ_{00} o *ecuație Poisson*, care are soluția

(10) $$\gamma_{00}(x^1, x^2, x^3) = \frac{\varkappa c^2}{4\pi} \iiint \frac{\mu(y^1, y^2, y^3)}{\rho} dy^1 dy^2 dy^3,$$

$$\rho^2 = (x^1 - y^1)^2 + (x^2 - y^2)^2 + (x^3 - y^3)^2.$$

Ţinînd seama de (8), avem

$$\frac{\mathrm{d}^2x^\alpha}{\mathrm{d}t^2} = \frac{\varkappa c^4}{8\pi}\,\frac{\partial}{\partial x^\alpha}\iiint \frac{\mu(y^1,\, y^2,\, y^3)}{\rho}\,\mathrm{d}y^1\,\mathrm{d}y^2\,\mathrm{d}y^3. \tag{11}$$

Putem să alegem valoarea coeficientului $\varkappa$ astfel ca să avem

$$\frac{\mathrm{d}^2x^\alpha}{\mathrm{d}t^2} = k\frac{\partial}{\partial x^\alpha}\iiint \frac{\mu}{\rho}\,\mathrm{d}y^1\,\mathrm{d}y^2\,\mathrm{d}y^3, \tag{12}$$

k fiind constanta gravitaţiei universale; dar

$$V = k\iiint_D \frac{\mu}{\rho}\,\mathrm{d}y^1\,\mathrm{d}y^2\,\mathrm{d}y^3 \tag{13}$$

este potenţialul gravitaţiei universale. Am obţinut ecuaţiile mişcării, în cazul cîmpului gravitaţional newtonian.

Amintim că V este o funcţie armonică în exteriorul unei suprafeţe închise care înconjoară punctul $P(x^1,\, x^2,\, x^3)$. Pentru interiorul acestei suprafeţe, V satisface ecuaţia Poisson

$$\Delta V = -\,4k\pi\mu(x^1,\, x^2,\, x^3)$$

iar

$$\frac{\partial V}{\partial x^1} = k\iiint_D \mu\,\frac{y^1 - x^2}{\rho^3}\,\mathrm{d}v$$

etc. sînt componentele atracţiei pe care le-ar exercita asupra unui material de masă 1 plasat în P, pe o masă de densitate variabilă $\mu(y^1,\, y^2,\, y^3)$ răspîndită în D, presupunînd că atracţia ar avea loc după legea Newton. Aceasta explică numele de potenţial newtonian.

D. METRICA SCHWARTZSCHILD

1. Introducerea metricii statice cu simetrie sferică. a) Presupunem că în spaţiul evenimentelor putem să alegem un sistem de coordonate x^i cu proprietăţile:

1. Forma metrică pătratică

$$\mathrm{d}s^2 = g_{ij}\,\mathrm{d}x^i\,\mathrm{d}x^j \quad (i, j = 0, 1, 2, 3) \tag{1}$$

este invariantă relativ la toate transformările ortogonale posibile în x^1, x^2, x^3.

2. Coeficienţii g_{ij} nu depind de timp, adică de x^0. Spunem atunci că metrica (1) este *statică cu simetrie sferică*.

b) Evident că $x^0 = \text{const}$, deci $\mathrm{d}x^0 = 0$ ne conduce atunci la o metrică în cordonatele x^1, x^2, x^3 invariantă într-o rotaţie.

Trecem la coordonate polare în spaţiul euclidian descris de punctele de coordonate variabile x^1, x^2, x^3, anume

$$x^1 = r\sin\theta\cos\varphi, \quad x^2 = r\sin\theta\sin\varphi, \quad x^3 = r\cos\theta, \tag{2}$$

de unde

$$(\mathrm{d}x^1)^2 + (\mathrm{d}x^2)^2 + (\mathrm{d}x^3)^2 = \mathrm{d}r^2 + r^2(\mathrm{d}\theta^2 + \sin^2\theta\,\mathrm{d}\varphi^2). \tag{3}$$

O formă pătratică invariantă într-o rotaţie, adică pentru $r = \text{const}$, este deci de forma

$$\mathrm{d}\mathring{s}^2 = g_{11}(r)\,\mathrm{d}r^2 + f(r)\,(\mathrm{d}\theta^2 + \sin^2\theta\,\mathrm{d}\varphi^2).$$

Printr-o schimbare de variabilă, luăm pe $f(r)$ ca variabilă independentă în locul lui r; pentru comoditate, punem r^2 în locul lui $f(r)$:

$$\mathrm{d}\mathring{s}^2 = g_{11}(r)\,\mathrm{d}r^2 + r^2(\mathrm{d}\theta^2 + \sin^2\theta\,\mathrm{d}\varphi^2).$$

c) Forma (1) devine atunci

$$\mathrm{d}s^2 = g_{00}(\mathrm{d}x^0)^2 + 2g_{0i}\,\mathrm{d}x^0\,\mathrm{d}x^i + \mathrm{d}\mathring{s}^2.$$

Printr-o transformare de coordonate putem să anulăm coeficienţii g_{0i}. Interpretînd anularea formei (1), în care punem x^i în loc de $\mathrm{d}x^i$, ca ecuaţia unei cuadrice în coordonate omogene, această anulare revine la a lua o cuadrică cu centrul în origine (1, 0, 0, 0), deci la a translata axele x^1, x^2, x^3, ceea ce nu schimbă metrica $\mathrm{d}\mathring{s}^2$. Avem deci

$$\mathrm{d}s^2 = g_{00}(\mathrm{d}x^0)^2 + g_{11}\,\mathrm{d}r^2 + r^2(\mathrm{d}\theta^2 + \sin^2\theta\,\mathrm{d}\varphi^2). \tag{4}$$

Coeficienţii g_{00} şi g_{11} sînt funcţii numai de r, metrica fiind invariantă pentru $r = \text{const}$.

d) Am admis, ca un principiu al teoriei relativităţii generale, că metrica diferă de metrica relativităţii restrînse

$$-\,(\mathrm{d}x^0)^2 + \mathrm{d}r^2 + r^2(\mathrm{d}\theta^2 + \sin^2\theta\,\mathrm{d}\varphi^2)$$

prin termeni de ordinul al doilea. Deci g_{00} este aproape -1 şi g_{11} aproape 1. Punem

(5) $$g_{00} = -\,e^{\lambda}, \quad g_{11} = e^{\mu},$$

λ şi μ fiind funcţii de r, anulîndu-se simultan, pentru o anumită valoare r_0 a lui r.

Revenim pentru uniformitate la notaţia x^i a coordonatelor, punînd

(6) $$x^1 = r, \quad x^2 = \theta, \quad x^3 = \varphi.$$

Avem atunci metrica statică cu simetrie sferică

(7) $$ds^2 = -\,e^{\lambda}(dx^0)^2 + e^{\mu}(dx^1)^2 + (x^1)^2\,[(dx^2)^2 + \sin^2 x^2 (dx^3)^2].$$

2. Curbura metricii statice cu simetrie sferică. a) Considerăm metrica cu simetrie sferică (1.7). Pentru ca această metrică să fie relativistă, trebuie să satisfacă ecuaţiilor Einstein. În acest scop trebuie să calculăm curbura şi tensorul Ricci. Avem

(1) $$g_{00} = -\,e^{\lambda}, \quad g_{11} = e^{\mu}, \quad g_{22} = (x^1)^2, \quad g_{33} = (x^1)^2 \sin^2 x^2$$

şi restul coeficienţilor nuli; de aici

(2) $$g = |g_{ij}| = -\,e^{(\lambda+\mu)}(x^1)^4 \sin^2 x^2$$

şi

(3) $$g^{00} = -\,e^{-\lambda}, \quad g^{11} = e^{\mu}, \quad g^{22} = \frac{1}{(x^1)^2}, \quad g^{33} = \frac{1}{(x^1)^2 \sin^2 x^2}.$$

Calculăm simbolurile Christoffel de prima speţă, conform formulei

(4) $$(ijk) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{ik}}{\partial x^j} + \frac{\partial g_{jk}}{\partial x^i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k}\right)$$

şi ţinem seama că g_{ij} depind numai de x^1, afară de g_{33}, care depinde şi de x^2. Avem

$$(001) = \frac{1}{2} e^{\lambda}\lambda', \quad (010) = -\frac{1}{2} e^{\lambda}\lambda', \quad (111) = \frac{1}{2} e^{\mu}\mu',$$

(5) $$(122) = x^1, \quad (133) = x^1 \sin^2 x^2, \quad (221) = -\,x^1,$$

$$(233) = (x^1)^2 \sin x^2 \cos x^2, \quad (331) = -\,x^1 \sin^2 x^2,$$

$$(332) = -\,(x^1)^2 \sin x^2 \cos x^2$$

la care se adaugă simbolurile egale, obţinute prin permutarea primilor doi indici. Restul simbolurilor sînt nule. Avem 40 de simboluri, dintre care trebuie să-i reţinem numai pe cei cu doi indici egali şi al treilea 1, la care adăugăm pe (233), (332). Această observaţie reduce calculele.

b) Calculăm simbolurile Christoffel de a doua speţă, conform formulei

(6) $$\binom{l}{i\ j} = a^{lk}(ijk).$$

Plecăm de la formulele (5), ca să reducem numărul de încercări; obţinem

$$\binom{1}{0\ 0} = \frac{\lambda'}{2} e^{\lambda-\mu}, \quad \binom{0}{0\ 1} = \frac{\lambda'}{2}, \quad \binom{1}{1\ 1} = \frac{\mu'}{2},$$

(7) $$\binom{2}{0\ 2} = \frac{1}{x^1}, \quad \binom{3}{1\ 3} = \frac{1}{x^1}, \quad \binom{1}{2\ 2} = -\,x^1 e^{-\mu},$$

$$\binom{3}{2\ 3} = \operatorname{ctg} x^2, \quad \binom{1}{3\ 3} = -\,x^1 e^{-\mu} \sin^2 x^2,$$

$$\binom{2}{3\ 3} = -\sin x^2 \cos x^2.$$

Ceilalţi coeficienţi sînt nuli.

c) Apoi avem din

(8) $$R^i_{jkl} = \frac{\partial\binom{i}{j\ l}}{\partial x^k} - \frac{\partial\binom{i}{k\ j}}{\partial x^l} + \binom{i}{k\ s}\binom{s}{j\ l} - \binom{i}{l\ s}\binom{s}{j\ k},$$

(9) $$R_{jl} = R^i_{jil} = \frac{\partial\binom{i}{j\ l}}{\partial x^i} - \frac{\partial\binom{i}{j\ i}}{\partial x^l} + \binom{i}{i\ s}\binom{s}{j\ l} - \binom{i}{l\ s}\binom{s}{j\ i}.$$

Rezultă

$$R_{00} = \frac{\partial\binom{i}{0\ 0}}{\partial x^i} + \binom{s}{0\ 0}\binom{i}{i\ s} - \binom{i}{0\ s}\binom{s}{0\ i} =$$

$$\frac{\partial\binom{1}{0\ 0}}{\partial x^1} + \binom{1}{0\ 0}\left[\binom{0}{0\ 1} + \binom{1}{1\ 1} + \binom{2}{2\ 1} + \binom{3}{3\ 1}\right] - 2\binom{1}{0\ 0}\binom{0}{0\ 1}$$

şi ţinînd seama de (7), obţinem

$$(10)\qquad R_{00} = e^{\lambda-\mu}\left(\frac{\lambda''}{2} + \frac{\lambda'^2}{4} - \frac{\lambda'\mu'}{4} + \frac{\lambda'}{x^1}\right).$$

De asemenea

$$R_{11} = \frac{\partial\binom{i}{1\;1}}{\partial x^i} - \frac{\partial\binom{i}{1\;i}}{\partial x^1} + \binom{s}{1\;1}\binom{i}{i\;s} - \binom{i}{1\;s}\binom{s}{1\;i} =$$

$$= -\frac{\partial\binom{0}{1\;0}}{\partial x^1} - \frac{\partial\binom{2}{1\;2}}{\partial x^1} - \frac{\partial\binom{3}{1\;3}}{\partial x^1} + \binom{1}{1\;1}\left[\binom{0}{0\;1} + \binom{1}{1\;1}\right] +$$

$$+ \binom{2}{2\;1}\binom{3}{3\;1} - \binom{0}{1\;0}^2 - \binom{1}{1\;1}^2 - \binom{2}{1\;2}^2 - \binom{3}{1\;3}^2;$$

$$(11)\qquad R_{11} = -\frac{\lambda''}{2} - \frac{\lambda'^2}{4} + \frac{\lambda'\mu'}{4} + \frac{\mu'}{x^1}.$$

În continuare

$$R_{22} = \frac{\partial\binom{i}{2\;2}}{\partial x^1} - \frac{\partial\binom{i}{2\;i}}{\partial x^2} + \binom{s}{2\;2}\binom{i}{i\;s} - \binom{i}{2\;s}\binom{s}{2\;i} =$$

$$= \frac{\partial\binom{1}{2\;2}}{\partial x^1} - \frac{\partial\binom{3}{2\;3}}{\partial x^2} + \binom{1}{2\;2}\left[\binom{0}{0\;1} + \binom{1}{1\;1} + \binom{2}{2\;1} +\right.$$

$$\left. + \binom{3}{3\;1}\right] - 2\binom{1}{2\;2}\binom{2}{2\;1} - \binom{3}{2\;3}^2;$$

$$(12)\qquad R_{22} = 1 - e^{-\mu}\left(1 + \frac{\lambda' - \mu'}{2}\, x^1\right).$$

În fine

$$R_{33} = \frac{\partial\binom{i}{3\;3}}{\partial x^i} + \binom{s}{3\;3}\binom{i}{i\;s} - \binom{i}{3\;s}\binom{s}{3\;i} =$$

$$= \frac{\partial\binom{1}{3\;3}}{\partial x^1} + \frac{\partial\binom{2}{3\;3}}{\partial x^2} + \binom{1}{3\;3}\left[\binom{0}{0\;1} + \binom{1}{1\;1} + \binom{2}{2\;1} +\right.$$

$$\left. + \binom{3}{3\;1}\right] + \binom{2}{3\;3}\binom{3}{2\;3} - \binom{1}{3\;3}\binom{3}{3\;1} - 2\binom{2}{3\;3}\binom{3}{2\;3};$$

$$(13)\qquad R_{33} = R_{22}\sin^2 x^2.$$

Celelalte componente ale tensorului Ricci sînt nule. Rezultă că forma invariantă

$$(14)\qquad \psi = R_{ij}\, dx^i\, dx^j =$$

$$= R_{00}(dx^0)^2 + R_{11}(dx^1)^2 + R_{22}[(dx^2)^2 + \sin^2\theta(dx^3)^2],$$

unde R_{ij} sînt funcţii numai de x^1 este de asemenea o formă cu simetrie sferică.

d) Ţinînd seama de

$$R = g^{ij}R_{ij} = g^{00}R_{00} + g^{11}R_{11} + g^{22}R_{22} + g^{33}R_{33}$$

avem

$$R = e^{-\mu}\left(-\frac{\lambda''}{2} + \frac{\lambda'\mu'}{4} - \frac{\lambda'^2}{4} - \frac{\lambda'}{x^1} - \frac{\lambda''}{2} + \frac{\lambda'\mu'}{4} - \frac{\lambda'^2}{4} + \frac{\mu'}{x^1}\right) +$$

$$+ \frac{2}{(x^1)^2}\left[1 + e^{-\mu}\left(-1 + x^1\mu' - \frac{\lambda' + \mu'}{2}\, x^1\right)\right].$$

Deci invariantul lui Ricci este

$$(15)\qquad R = \frac{2}{(x^1)^2} - e^{-\mu}\left(\lambda'' - \frac{\lambda'\mu'}{2} + \frac{\lambda'^2}{2} + \frac{3}{2}\,\frac{\lambda'}{x^1} - 2\,\frac{\mu'}{x^1} + \frac{2}{(x^1)^2}\right).$$

În cazul metricii Minkowski, cu $\lambda = \mu = 0$ regăsim $R = 0$.

3. Metrică statică relativistă cu simetrie sferică. a) Am obţinut metrica

$$(1)\qquad ds^2 = -e^{\lambda}(dx^0)^2 + e^{\mu}(dx^1)^2 + (x^1)^2[(dx^2)^2 + \sin^2 x^2 (dx^3)^2],$$

unde λ şi μ sînt funcţii de x^1 pe care trebuie să le determinăm prin condiţia ca să fie satisfăcute relaţiile Einstein. Cea mai simplă ipoteză în care putem să integrăm ecuaţiile Einstein, este că tensorul energie este nul, $T^{ij} = 0$, deci, conform ecuaţiilor (10) din C.2, simbolurile Ricci sînt toate nule, adică

$$(2)\qquad \frac{\lambda''}{2} + \frac{\lambda'^2}{4} - \frac{\lambda'\mu'}{4} + \frac{\lambda'}{x^1} = 0, \qquad (3)\qquad \frac{\lambda''}{2} + \frac{\lambda'^2}{4} - \frac{\lambda'\mu'}{4} - \frac{\mu'}{x^1} = 0.$$

$$(4)\qquad -1 + e^{-\mu}\left(1 + \frac{\lambda' - \mu'}{2} x^1\right) = 0.$$

b) Din aceste relaţii vom determina pe λ şi pe μ. Din (2) şi (3) rezultă

$$(5)\qquad \lambda' + \mu' = 0,$$

deci $\lambda + \mu = C$. Dar λ şi μ se anulează simultan. Deci

$$(6)\qquad \mu = -\lambda.$$

Relaţia (4) devine

$$-1 + e^{\lambda}(1 + \lambda' x^1) = 0, \quad -1 + (x^1 e^{\lambda})' = 0, \quad x^1 e^{\lambda} = x^1 - a,$$

a fiind o constantă; deci

$$(7)\qquad e^{\lambda} = 1 - \frac{a}{x^1}, \qquad (8)\qquad e^{\mu} = e^{-\lambda} = \frac{1}{1 - \frac{a}{x^1}}.$$

c) Rămîne de arătat că soluţia verifică şi ecuaţiile rămase (1) şi (2), echivalente între ele prin condiţia (5). De exemplu, (2) cu $\mu = -\lambda$ devine

$$\lambda'' + \lambda'^2 + 2\frac{\lambda'}{x^1} = 0.$$

Dar

$$\lambda = \ln\left(1 - \frac{a}{x^1}\right), \quad \lambda' = \frac{a}{x^1(x^1 - a)}, \quad \lambda'' = -\frac{a(2x^1 - a)}{(x^1)^2(x^1 - a)^2}.$$

Atunci

$$\lambda'' + \lambda'^2 = -\frac{2a}{(x^1)^2(x^1 - a)} = -2\frac{\lambda'}{x^1},$$

deci sistemul este compatibil. Obţinem metrica statică central simetrică a lui Karl Schwarzschild (1916)

$$(9)\qquad ds^2 = -\left(1 - \frac{a}{x^1}\right)(dx^0)^2 + \frac{(dx^1)^2}{1 - \frac{a}{x^1}} + (x^1)^2[(dx^2)^2 + \sin^2 x^2 (dx^3)^2].$$

d) Coeficientul a depinde evident de masă, deoarece cîmpul gravitaţional intervine prin coficienţii g_{ij}.

Reluăm teoria aproximată a relativităţii. Am stabilit formula (12) din C.3;

$$\frac{d^2x^\alpha}{dt^2} = -c\frac{\partial x_{\alpha 0}}{\partial t} + \frac{c^2}{2}\frac{\partial \gamma_{00}}{\partial x^\alpha} - \frac{\partial \gamma_{\alpha\beta}}{\partial t}\frac{dx^\beta}{dt} + c\left(\frac{\partial \gamma_{\beta 0}}{\partial x^\alpha} - \frac{\partial \gamma_{\alpha 0}}{\partial x^\beta}\right)\frac{dx^\beta}{dt} - \frac{1}{2}\frac{\partial \gamma_{00}}{\partial t}\frac{dx^\alpha}{dt},$$

care în cazul staţionar (γ_{ij} nu depind de t) devine

$$(10)\qquad \frac{d^2x^\alpha}{dt^2} = \frac{c^2}{2}\frac{\partial \gamma_{00}}{\partial x^\alpha} + c\left(\frac{\partial \gamma_{\beta 0}}{\partial x^\alpha} - \frac{\partial \gamma_{\alpha 0}}{\partial x^\beta}\right)\frac{dx^\beta}{dt}.$$

Pentru metrica (9), $\gamma_{\alpha 0} = 0$. Pe de altă parte metrica (9) este scrisă în coordonate polare iar x^α din (10) au semnificaţia coordonatelor carteziene; să le notăm cu y^α. Atunci

$$(11)\qquad \frac{d^2y^\alpha}{dt^2} = \frac{\partial}{\partial y^\alpha}\frac{\gamma_{00}c^2}{2}.$$

Deci *cîmpul gravitațional posedă potențialul* $\frac{1}{2}\gamma_{00}c^2$.

Deoarece

$$g_{00} = -1 + \gamma_{00} = -\left(1 - \frac{a}{x^1}\right), \quad x^1 = r,$$

avem

$$\gamma_{00} = \frac{a}{r}; \tag{12}$$

deoarece mecanica clasică și relativistă se racordează, identificăm (12) cu potențialul newtonian

$$\frac{1}{2}\gamma_{00}c^2 = \frac{ac^2}{2r} = \frac{km}{r}.$$

Obținem *interpretarea fizică a constantei* a:

$$a = \frac{2km}{c^2}. \tag{13}$$

De exemplu, în cazul sistemului solar, m din formula (13) este masa Soarelui, egală cu $2\cdot 10^{33}$ g. Obținem

$$a \approx 3 \text{ km}, \tag{14}$$

distanță foarte mică în raport cu dimensiunile cosmosului. Astfel, r fiind distanța Pămînt – Soare, $r \approx 150\,000\,000$km, avem

$$\frac{a}{r} = 2\cdot 10^{-8}.$$

Relativitatea generalizată diferă de relativitatea restrînsă prin modificarea a doi coeficienți, înlocuind unitatea prin $1 - 2\cdot 10^{-8}$. Este o modificare foarte mică. Dar acest coeficient depinde de masă încît relativitatea generalizată este o teorie gravitațională. Spațiul geometric dat prin metrica (9) generează proprietăți gravitaționale.

Varietatea E_4^1 a teoriei relativității restrînse, nedepinzind de masă, este omogenă în toate punctele sale. Varietatea V_4 a teoriei gravitației este neomogenă, densitatea materiei fiind variabilă. Dar pentru $r \to \infty$ metrica Schwarzschild coincide cu metrica Minkowski.

Practic, există o valoare r_0 astfel ca în interiorul sferei cu centrul în origine și de rază r_0 se exercită gravitația și aplicăm teoria relativității generalizate. În afara sferei, gravitația este insensibilă și tinde către zero, deci aplicăm teoria relativității restrînse. Această concepție corespunde modelului fizic al sistemului solar.

e) Deoarece R_{ij} sînt nule, și invariantul Ricci

$$R = g^{ij}R_{ij}$$

este nul în cazul metricii Schwarzschild. Dar curbura nu este nulă Curbura varietății riemanniene nu se măsoară cu invariantul Ricci.

Să arătăm de exemplu că cel puțin R^2_{323} este o componentă nenulă a curburii. Avem

$$R^2_{323} = -\frac{\partial\begin{pmatrix}2\\3\ 2\end{pmatrix}}{\partial x^3} + \frac{\partial\begin{pmatrix}2\\3\ 3\end{pmatrix}}{\partial x^2} + \begin{pmatrix}2\\s\ 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}s\\3\ 3\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}2\\s\ 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}s\\3\ 2\end{pmatrix}.$$

Din formulele (7) din § 2 pentru $\mu = -\lambda$ avem

$$\begin{pmatrix}2\\3\ 2\end{pmatrix} = 0,\quad \begin{pmatrix}2\\3\ 3\end{pmatrix} = -\sin x^2\cos x^2,\quad \begin{pmatrix}2\\0\ 2\end{pmatrix} = 0,$$

$$\begin{pmatrix}2\\1\ 2\end{pmatrix} = \frac{1}{x^1},\quad \begin{pmatrix}2\\2\ 2\end{pmatrix} = 0,\quad \begin{pmatrix}2\\3\ 2\end{pmatrix} = 0,$$

$$\begin{pmatrix}2\\0\ 3\end{pmatrix} = 0,\quad \begin{pmatrix}2\\1\ 3\end{pmatrix} = 0,\quad \begin{pmatrix}2\\2\ 3\end{pmatrix} = 0,$$

$$\begin{pmatrix}1\\3\ 3\end{pmatrix} = -x^1 e^{\lambda}\sin^2 x^2,\quad \begin{pmatrix}3\\2\ 3\end{pmatrix} = \operatorname{ctg} x^2$$

deci $R^2_{323} = \sin^2 x^2(1 - e^{\lambda})$ și, conform cu (7),

$$R^2_{323} = \frac{a}{x^1}\sin^2 x^2. \tag{15}$$

Deci pentru $a \neq 0$, curbura metricii Schwarzschild este diferită de zero. Pentru $a = 0$ regăsim metrica relativității restrînse.

4. Geodezicele metricii Schwarzschild. a) Considerăm un plan care trece prin origine ($x^1 = 0$); din cauza rolului simetric jucat de aceste plane, presupunem că am ales coordonatele astfel ca planul considerat să fie $x^2 = \frac{\pi}{2}$. În acest plan avem coordonatele polare x^1, x^3 funcții de x^0, cînd punctul descrie o curbă în plan. Considerăm o geodezică a metricii Schwarzschild care trece prin două puncte arbitrare A și B ale planului considerat, condiții prin care geodezica este determinată. Deoarece variabila x^2 intervine în metrică numai sub forma $(\mathrm{d}x^2)^2$, rezultă că simetrica geodezicei în raport cu planul $x^2 = \frac{\pi}{2}$, determinată de aceleași ecuații diferențiale, coincide cu prima geodezică; deoarece prin două puncte trece o singură geodezică, cele două curbe simetrice considerate coincid; pe de altă parte punctele A și B au fost luate arbitrar, deci toată geodezica este plană. În consecință geodezicele sînt curbe plane, al căror plan trece prin origine.

b) Căutăm deci geodezicele metricii Schwarzschild

$$(1)\qquad \mathrm{d}s^2 = -\left(1 - \frac{a}{x^1}\right)(\mathrm{d}x^0)^2 + \frac{(\mathrm{d}x^1)^2}{1 - \frac{a}{x^1}} + (x^1)^2\,[(\mathrm{d}x^2)^2 + \sin^2 x^2 (\mathrm{d}x^3)^2]$$

cuprinse în planul ecuatorului

$$(2)\qquad x^2 = \frac{\pi}{2}.$$

Metrica devine

$$(3)\qquad \mathrm{d}s^2 = -\left(1 - \frac{a}{x^1}\right)(\mathrm{d}x^0)^2 + \frac{(\mathrm{d}x^1)^2}{1 - \frac{a}{x^1}} + (x^1)^2\,(\mathrm{d}x^3)^2.$$

Geodezicele sînt date de

$$\frac{\mathrm{d}^2 x^k}{\mathrm{d}\sigma^2} + \begin{pmatrix} k \\ i\;\, j \end{pmatrix} \frac{\mathrm{d}x^i}{\mathrm{d}\sigma}\,\frac{\mathrm{d}x^j}{\mathrm{d}\sigma} = 0.$$

unde $\begin{pmatrix} k \\ i\;\, j \end{pmatrix}$ sînt date de (2.7) pentru $x^2 = \frac{\pi}{2}$, $\mu' = -\lambda'$. Obținem

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0\;\, 0 \end{pmatrix} = \frac{\lambda'}{2}\,e^{2\lambda}, \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 0\;\, 1 \end{pmatrix} = \frac{\lambda'}{2}, \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 1\;\, 1 \end{pmatrix} = -\frac{\lambda'}{2},$$

$$(4)\qquad \begin{pmatrix} 2 \\ 1\;\, 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1\;\, 3 \end{pmatrix} = \frac{1}{x^1}, \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 2\;\, 2 \end{pmatrix} = -x^1 e^{\lambda}, \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 3\;\, 3 \end{pmatrix} = -x^1 e^{\lambda}$$

și restul nule.

Pentru $k = 0, 1, 2, 3$ și $x^2 = \frac{\pi}{2}$ ecuațiile geodezicelor devin

$$(5)\qquad \begin{aligned} &\frac{\mathrm{d}^2 x^0}{\mathrm{d}\sigma^2} + \lambda' \frac{\mathrm{d}x^0}{\mathrm{d}\sigma}\,\frac{\mathrm{d}x^1}{\mathrm{d}\sigma} = 0,\\ &\frac{\mathrm{d}^2 x^1}{\mathrm{d}\sigma^2} + \frac{\lambda'}{2}\,e^{2\lambda}\left(\frac{\mathrm{d}x^0}{\mathrm{d}\sigma}\right)^2 - \frac{\lambda'}{2}\left(\frac{\mathrm{d}x^1}{\mathrm{d}\sigma}\right)^2 - x^1 e^{\lambda}\left(\frac{\mathrm{d}x^3}{\mathrm{d}\sigma}\right)^2 = 0,\\ &\frac{\mathrm{d}^2 x^3}{\mathrm{d}\sigma^2} + \frac{2}{x^1}\,\frac{\mathrm{d}x^1}{\mathrm{d}\sigma}\,\frac{\mathrm{d}x^3}{\mathrm{d}\sigma} = 0. \end{aligned}$$

Prima și ultima ecuație sînt de forma

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\sigma}\left(e^{\lambda}\frac{\mathrm{d}x^0}{\mathrm{d}\sigma}\right) = 0, \quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\sigma}\left[(x^1)^2 \frac{\mathrm{d}x^3}{\mathrm{d}\sigma}\right] = 0.$$

Avem deci două integrale

$$(6)\qquad e^{\lambda}\frac{\mathrm{d}x^0}{\mathrm{d}\sigma} = A, \quad (x^1)^2 \frac{\mathrm{d}x^3}{\mathrm{d}\sigma} = B.$$

c) Deoarece vectorul $\frac{\mathrm{d}x^i}{\mathrm{d}\sigma}$ se transportă prin paralelism de-a lungul geodezicei, el are o lungime constantă

$$g_{ij}\frac{\mathrm{d}x^i}{\mathrm{d}\sigma}\,\frac{\mathrm{d}x^j}{\mathrm{d}\sigma} = C;$$

deci, conform metricii, sub forma (3.1),

$$-e^{\lambda}\left(\frac{dx^0}{d\sigma}\right)^2+e^{-\lambda}\left(\frac{dx^1}{d\sigma}\right)^2+(x^1)^2\left(\frac{dx^3}{d\sigma}\right)^2=C;$$

deoarece $ds^2\leqslant 0$ în cazul relativității restrînse (A.5.d), proprietatea este păstrată prin racordare, în relativitatea generală, deci $C\leqslant 0$. Rezultă

$$-A^2e^{-\lambda}+e^{-\lambda}\left(\frac{dx^1}{d\sigma}\right)^2+\frac{B^2}{(x^1)^2}=C$$

sau

(7) $$\left(\frac{dx^1}{d\sigma}\right)^2=A^2+e^{\lambda}\left(C-\frac{B^2}{(x^1)^2}\right).$$

Eliminăm pe σ folosind și a doua ecuație (6); obținem

(8) $$\left[\frac{1}{(x^1)^2}\frac{dx^1}{dx^3}\right]^2=\frac{1}{B^2}\left[A^2+e^{\lambda}\left(C-\frac{B^2}{(x^1)^2}\right)\right].$$

Aceasta este ecuația diferențială a geodezicei în coordonate polare $x^1=r$, $x^3=\varphi$ în planul $x^2=\frac{\pi}{2}$.

d) Notăm

(9) $$\frac{A^2}{B^2}=A_1,\quad \frac{C}{B^2}=B_1.$$

Avem

(10) $$\left(\frac{1}{r^2}\frac{dr}{d\varphi}\right)^2=A_1+e^{\lambda}\left(B_1-\frac{1}{r^2}\right).$$

Punem

(11) $$\rho=\frac{1}{r}$$

și ținem seama, conform relației (3.7), că $e^{\lambda}=1-\frac{a}{r}$. Atunci

(12) $$\left(\frac{d\rho}{d\varphi}\right)^2=A_1+(1-a\rho)(B_1-\rho^2).$$

Deoarece ds^2 este negativ sau nul, avem $C\leqslant 0$. Atunci

(13) $$A_1\geqslant 0,\quad B_1\leqslant 0.$$

Din (12), prin derivare în raport cu φ, avem

$$2\frac{d\rho}{d\varphi}\frac{d^2\rho}{d\varphi^2}=-a\frac{d\rho}{d\varphi}(B_1-\rho^2)+(1-a\rho)\left(-2\rho\frac{d\rho}{d\varphi}\right),$$

(14) $$\frac{d^2\rho}{d\varphi^2}=-\frac{a}{2}B_1-\rho+\frac{3}{2}a\rho^2.$$

5. Rotația orbitelor planetelor. a) Am obținut ecuația diferențială a geodezicelor

(1) $$\frac{d^2\rho}{d\varphi^2}=\frac{1}{p}-\rho+\alpha\rho^2$$

în planul $x^2=\frac{\pi}{2}$ al ecuatorului. Am pus

(2) $$p=-\frac{2}{aB_1}\geqslant 0,\quad \alpha=\frac{3}{2}a.$$

b) Integrăm ecuația (1) prin aproximații succesive. Neglijăm în primul rînd, ultimul termen, deoarece $\rho=\frac{1}{r}$ fiind mic, ρ^2 este de al doilea ordin. Obținem

(3) $$\frac{d^2\rho}{d\varphi^2}=\frac{1}{p}-\rho$$

cu integrala

$$\rho_0(\varphi)=\frac{1}{p}+L\cos(\varphi-\theta).$$

Printr-o rotație luăm $\theta=0$ și punem $e=Lp$; deoarece $r=\frac{1}{\rho}$, avem

(4) $$r=\frac{p}{1+e\cos\varphi}.$$

Deci, *într-o primă aproximație, geodezicele sînt conice.*

c) În a doua aproximaţie, punem

$$\rho(\varphi) = \rho_0(\varphi) + \rho_1(\varphi)$$

şi înlocuim în (1), ţinînd seama că ρ_0 este integrală a ecuaţiei (2). Obţinem

$$\frac{d^2\rho_1}{d\varphi^2} = -\rho_1 + \alpha(\rho_0 + \rho_1)^2;$$

ρ_1 fiind de al doilea ordin de mărime faţă de ρ, îl neglijăm în paranteză. Rămîne

$$\frac{d^2\rho_1}{d\varphi^2} = -\rho_1 + \alpha\rho_0^2 = -\rho_1 + \frac{\alpha}{p^2}(1 + e\cos\varphi)^2$$

(5) $$\frac{d^2\rho_1}{d\varphi^2} + \rho_1 = \frac{\alpha}{p^2}\left(1 + \frac{e^2}{2} + 2e\cos\varphi + \frac{e^2}{2}\cos 2\varphi\right).$$

d) Amintim că integrăm ecuaţia diferenţială de tipul

$$y'' + y = a + b\cos 2x + c\cos x,$$

considerînd iniţial ecuaţia

$$y'' + y = 0,$$

deci

$$y = A\cos x + B\sin x$$

şi adăugînd integralele parţiale ale ecuaţiilor

$$y'' + y = a, \quad y'' + y = b\cos 2x, \quad y'' + y = c\cos x,$$

adică

$$y_1 = a, \quad y_2 = -\frac{b}{3}\cos 2x, \quad y_3 = \frac{c}{2}x\sin x.$$

Deci

$$y = A\cos x + B\sin x + a - \frac{b}{3}\cos 2x + \frac{c}{2}x\sin x.$$

Din cauza formei ultimului termen soluţia nu este periodică.

e) Deci *integrala*

(6) $$\rho_1(\varphi) = \frac{\alpha e}{p^2}\varphi\sin\varphi$$

nu mai închide elipsele planetelor, în sensul că nu mai ajungem în punctul de plecare de la $\varphi = 0$, după o rotaţie a razei vectoare r de unghi 2π. Avem atunci ecuaţia orbitei cu corecţia acestui termen

$$\rho = \rho_0 + \rho_1 = \frac{1 + e\cos\varphi}{p} + \frac{\alpha e}{p^2}\varphi\sin\varphi = \frac{1}{p} + \frac{e}{p}\left(\cos\varphi + \frac{\alpha}{p}\varphi\sin\varphi\right),$$

$$\rho \approx \frac{1}{p} + \frac{e}{p}\cos\left(1 - \frac{\alpha}{p}\right)\varphi,$$

α fiind mic în raport cu p. Perioada lui ρ este acum

$$\frac{2\pi}{1 - \frac{\alpha}{p}} \approx 2\pi + \frac{2\pi\alpha}{p}.$$

Deci *planeta se roteşte în planul ei cu unghiul*

(7) $$\varepsilon = \frac{2\pi\alpha}{p} = \frac{3\pi a}{p}.$$

Unghiul este sensibil mai ales pentru planeta Mercur; conform calculului obţinem $\varepsilon = 42''\,9$ pe secol care este foarte aproape de valoarea observată, de $43''5$.

6. Curbarea razelor de lumină în cîmpul gravitaţiei. a) Razele de lumină sînt geodezice de lungime nulă; deci corespund în ecuaţia (4.14) pentru $C = 0$, deci $B_1 = 0$, $p = 0$. Avem deci

(1) $$\frac{d^2\rho}{d\varphi^2} = -\rho + \alpha\rho^2, \quad \alpha = \frac{3}{2}a.$$

Neglijînd pe ρ^2, avem ecuaţia

$$\frac{d^2\rho}{d\varphi^2} + \rho = 0$$

cu o primă integrală

$$\rho_0(\varphi) = L\cos(\varphi - \theta)$$

sau, printr-o rotație, anulăm pe θ ; punem $r = \dfrac{1}{\rho}$, deci

$$r_0 = \frac{l}{\cos\varphi}, \quad l = \frac{1}{L} = r_0(0). \tag{2}$$

Deci *într-o primă aproximație, traiectoriile luminii sînt drepte.*

b) Trecem la a doua aproximație, luînd soluțiile ecuației complete, sub forma

$$\rho(\varphi) = \rho_0(\varphi) + \rho_1(\varphi).$$

Obținem

$$\frac{d^2\rho_1}{d\varphi^2} = -\rho_1 + \alpha\rho_0^2 = -\rho_1 + \alpha\frac{\cos^2\varphi}{l^2},$$

neglijînd în paranteză pe ρ_1 în prezența lui ρ_0. Avem soluția

$$\rho_1 = \frac{\alpha}{3l^2}(1 + \sin^2\varphi). \tag{3}$$

În adevăr, pentru ecuația

$$\frac{d^2y}{dx^2} + y = k\cos^2 x = \frac{k}{2}(1 + \cos 2x)$$

avem soluția particulară de forma

$$y = \frac{k}{2} + h\sin 2x + l\cos 2x;$$

obținem $h = 0$, $l = -\dfrac{k}{6}$; deci

$$y = \frac{k}{2} - \frac{k}{6}\cos 2x = \frac{k}{2} - \frac{k}{6}(1 - 2\sin^2 x) = \frac{k}{3} + \frac{k}{3}\sin^2 x;$$

deci

$$y = \frac{k}{3}(1 + \sin^2 x).$$

c) Ținînd seama de (2) și (3), avem

$$\rho = \rho_0 + \rho_1 = \frac{\cos\varphi}{l} + \frac{\alpha}{3l^2}(1 + \sin^2\varphi). \tag{4}$$

Pentru $\varphi = \dfrac{\pi}{2}$, $r_0 \to \infty$ conform formulei (2), deci $\rho \to 0$. În vecinătatea acestei valori, punînd $\varphi = \dfrac{\pi}{2} + \delta$, deoarece

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} + \delta\right) = \cos\delta \approx 1, \quad \cos\left(\frac{\pi}{2} + \delta\right) = -\sin\delta \approx -\delta,$$

avem din (4)

$$0 \approx -\frac{\delta}{l} + \frac{2\alpha}{3l^2},$$

deci

$$\delta \approx \frac{2\alpha}{3l}. \tag{5}$$

Pentru $\varphi = \dfrac{\pi}{2}$ obținem asimptota curbei (4), deci o dreaptă (2); curbarea razei reale față de direcția inițială a asimptotei drepte este dată de unghiul

$$2\delta \approx \frac{4\alpha}{3l} = \frac{2a}{r(0)} \tag{6}$$

adică, ținînd seama de (2) și (2) din § 5,

$$\delta \approx \frac{a}{r(0)}. \tag{7}$$

Valoarea calculată, de 1″ 74 coincide cu cea observată ulterior, în 1919.

7. Deplasarea spre roșu a razelor spectrului. a) Considerăm un punct fix S, Soarele, de masă m și un punct mobil P, Pămîntul, de masă neglijabilă. Fie o sursă luminoasă pe suprafața Soarelui, avînd perioada oscilațiilor luminoase egală cu τ_s și lungimea de undă corespunzătoare λ_s; le-am notat astfel deoarece sînt raportate la un sistem de referință cu originea în Soare. Față de un sistem de referință cu originea pe Pămînt, ele devin τ_p, λ_p așa cum sînt percepute.

Legătura dintre aceste mărimi este dată de metrica Schwarzschild

$$(1)\qquad ds^2 = -c^2\left(1-\frac{a}{r}\right)dt^2 + \frac{dr^2}{1-\frac{a}{r}} + r^2\,d\theta^2 + r^2\sin^2\theta\,d\varphi^2,$$

presupunînd Soarele așezat în originea O ; am notat

$$(2)\qquad a = \frac{2km}{c^2}.$$

Fixăm raza de lumină punînd $\theta = \text{const}$, $\varphi = \text{const}$; pe rază, r depinde de t conform formulei (1) în care $ds^2 = 0$. Obținem

$$(3)\qquad \frac{dr}{dt} = c\left(1-\frac{a}{r}\right).$$

Obținem astfel viteza radială a luminii în punctul situat la distanța r de centrul Soarelui. Această viteză este deci independentă de timp. Rezultă că două impulsuri luminoase de pe suprafața Soarelui, la intervalul de timp τ_s unul de altul vor ajunge pe Pămînt separate prin același interval de timp τ_s, observat de pe Soare.

b) Considerăm acum un punct $Q(r, \theta, \varphi, t)$ și altul vecin $Q'(r, \theta + d\theta, \varphi, t + dt)$, deci în același plan meridian (fig. 9). Distanța spațială $d\sigma = QQ'$ dintre evenimentele corespunzătoare punctelor Q, Q' este dată de (1) cu $r = \text{const}$, $\varphi = \text{const}$ și din nou $ds^2 = 0$, deoarece Q' fiind poziția vecină a lui Q, drumul QQ' este o traiectorie a luminii, deci

$$d\sigma^2 = r^2\,d\theta^2 = c^2\left(1-\frac{a}{r}\right)dt^2.$$

Obținem viteza luminii în direcția QQ',

$$(4)\qquad \frac{d\sigma}{dt} = c\left(1-\frac{a}{r}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

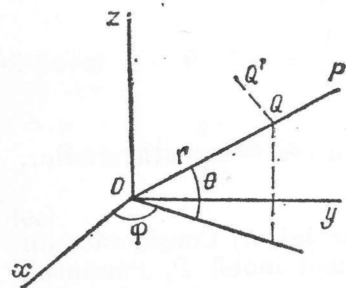


Fig. 9

Notăm cu l lungimea parcursă de lumină pe arcul QQ', măsurată de pe Pămînt, în intervalul de timp $(0, \tau_p)$; QQ' fiind aproape perpendiculară pe raza OP, avem aceeași formulă (4) a vitezei, care nu depinde de t; deci

$$(5)\qquad l = c\left(1-\frac{a}{r}\right)^{\frac{1}{2}}\tau_p.$$

c) În cazul particular în care punctul Q ar fi situat pe suprafața Soarelui am avea $r = r_s$, $l = \lambda_s$ iar (5) devine

$$(6)\qquad \lambda_s = c\left(1-\frac{a}{r_s}\right)^{\frac{1}{2}}\tau_p.$$

Dacă punctul Q ar fi situat pe Pămînt, am avea $r = r_p$ (distanța de la O pînă la suprafața Pămîntului), $l = \lambda_p$ și (5) devine

$$(7)\qquad \lambda_p = c\left(1-\frac{a}{r_p}\right)^{\frac{1}{2}}\tau_p.$$

Din relațiile (6) și (7) obținem

$$\frac{\lambda_p}{\lambda_s} = \left(1-\frac{a}{r_p}\right)^{\frac{1}{2}}\left(1-\frac{a}{r_s}\right)^{-\frac{1}{2}}.$$

Mărimile a/r fiind foarte mici, dezvoltăm în serie și avem

$$\frac{\lambda_p}{\lambda_s} \approx \left(1-\frac{a}{2r_p}\right)\left(1+\frac{a}{2r_s}\right) \approx 1 + \frac{a}{2r_s} - \frac{a}{2r_p}.$$

Neglijăm pe a/r_p, de ordin superior lui a/r_s, deoarece r_s este raza Soarelui iar r_p aproape distanța de la Soare la Pămînt. Punem apoi $\lambda_s = \lambda$, $\lambda_p = \lambda + \Delta\lambda$. Atunci

$$\frac{\lambda + \Delta\lambda}{\lambda} \approx 1 + \frac{a}{2r_s},$$

$$(8)\qquad \frac{\Delta\lambda}{\lambda} \approx \frac{a}{2r_s} \approx 2{,}12\cdot 10^{-6},$$

deoarece $a \approx 3$ km, $r_s \approx 7 \cdot 10^5$ km. Rezultă în spectrul solar o deviere spre roșu (redshift). Acest fenomen a fost observat, pînă la precizarea constantei, după ce a fost prezis de teoria relativității generale.

8. Concluzii. Conform principiului teoriei relativității generale, spațiul, timpul și materia în mișcare sînt într-o strînsă interdependență; proprietățile spațiale și temporale ale fenomenelor sînt determinate de distribuția maselor gravitaționale; mișcarea este determinată de geometria spațiului, adică de modul în care spațiul și timpul intervin în forma fundamentală a metricii. Ca descris de o geometrie riemanniană, spațiul este curbat mai ales în vecinătatea unei mari concentrații de mase, de exemplu Soarele în cazul sistemului planetar.

Teoria relativității este o ipoteză matematică a fenomenelor fizice. Teoria relativității restrînse a fost provocată de o experiență contradictorie în teoria mecanicii newtoniene. Elaborarea ei a permis să se explice și alte fenomene.

Avansul periheliului planetei Mercur, care nu concorda cu teoria relativității restrînse, a fost explicat în teoria relativității generale. Sucesul acestei teorii a fost asigurat de prevederea altor fenomene fizice, verificate, ulterior, experimental.

Această teorie, datorită unei modificări adînci a conceptelor de bază ale mecanicii newtoniene, a cuprins toată mecanica newtoniană și în plus a permis explicarea unor fenomene care nu se încadrează în logica mecanicii newtoniene. În primul rînd, mecanica cerească este fundamentată pe concepții diferite; traiectoriile planetelor nu sînt datorite unei forțe centrale a atracției universale ci sînt geodezice, adică traiectorii în absența forțelor, într-un cîmp gravitațional dat de o metrică riemanniană.

Teoria relativității nu contrazice principiile mecanicii clasice ci le extrapolează; pentru viteze mici, teoriile se racordează.

Pentru practica uzuală, efectele teoriei relativității sînt neglijabile. Dar pentru viteze mari, de exemplu în zborurile cosmice, această teorie este esențial aplicată. De asemenea legile teoriei relativității sînt utilizate în acceleratoarele de particule care servesc la studiul teoretic al structurii nucleului atomic și pentru obținerea tehnică a unor particule cu energie uriașă.

Din punct de vedere filozofic, stabilirea interdependenței dintre proprietățile spațiale și temporale ale materiei cu mișcarea, relevînd unitatea și condiționarea lor reciprocă, teoria relativității reprezintă o strălucită confirmare a principiilor materialismului dialectic.

9. Indicații bibliografice. a) Cele mai importante note științifice care au dezvoltat teoria clasică a relativității sînt următoarele.

L o r e n t z, H. *Electromagnetic phenomena in a system with any velocity smaller that of light.* Proc. Acad. Sc. Amsterdam, 6, 1904.

E i n s t e i n, A. *Zur Electrodynamik bewegter Korper.* Ann. Physik, 17, 1905.

M i n k o w s k i, H. *Raum und Zeit.* Phys. Zs., 10, 1909.

E i n s t e i n, A. *Die Grundlagen der allgemeinen Relativitvtstheorie.* An. Physä k 49, 1916.

S c h w a r z s c h i l d, K. *Über das Gravitationsfeld einse Massenpunktes nach der Einsteinschen Theorie.* Sitzungster Akad. Wiss, Berlin, 1916.

b) Printre primele cărți de expunere a teoriei relativității, citām următoarele.

D o n d e r, T. *Théorie du champs électromagnétique de Maxwell et du champs gravifique d'Einstein.* Paris, 1920.

E d d i n g t o n, A. *Space, time and gravitation. An outline of the general relativity theorie.* Cambridge, 1921.

L a u e, M. *Relativitätstheorie.* 2 vol. Braunschweig, 1921.

M a r c o l o n g o, R. *Relativita.* Messina, 1921.

B e c q u e r e l, J. B. *Le principe de la relativité et la théorie de la gravitation.* Paris, 1922.

W h i t e h e a d, A. *The principle of relativity with applicatics to phisical science.* Cambridge, 1922.

W e y l, H. *Raum, Zeit. Materie,* Berlin, 1923.

B i r k h o f f, G. *Relativity and modern physics.* Haward, 1923.

c) Pentru redactarea părții generale a teoriei am folosit următoarele lucrări:

V â l c o v i c i, V. *Introducere în mecanica relativistă.* Curs litografiat. București, 1960.

R a ș e v s k i i, P. K. *Rimanova geometriia i tenzornîi analiz.* Moscova. 1953.

V r ă n c e a n u, G. T e l e m a n, C. *Geometrie euclidiană, geometrii neeuclidiene și teoria relativității.* București, Editura tehnică, ed. 2, 1967.

S t o e n e s c u, Al. *Introducere în teoria relativității.* București, Editura tehnică, ed. 2, 1964.

PARTEA A TREIA

CAPITOLE SPECIALE

A. INTERPRETARE NEEUCLIDIANĂ A MECANICII RELATIVITĂŢII RESTRÎNSE

1. Geometria iperbolică, geometrie naturală a mecanicii relativităţii restrînse. a) Presupunem că sîntem în cazul iperbolic, deci coordonatele punctului $M(x^\lambda)$ sînt normate astfel ca

$$(x^0)^2 - (x^1)^2 - (x^2)^2 - (x^3)^2 = 1, \tag{1}$$

iar elementul de arc ds este dat de formula

$$ds^2 = -(dx^0)^2 + (dx^1)^2 + (dx^2)^2 + (dx^3)^2. \tag{2}$$

Avem deci

$$ds^2 = -dM^2 \tag{3}$$

şi astfel ds este imaginar. Vectorul unitar al tangentei devine

$$T = i\frac{dM}{ds}. \tag{4}$$

Distanţa dintre două puncte este dată de

$$\operatorname{ch} XY = X \cdot Y, \ \operatorname{sh} XY = \overline{XY}, \tag{5}$$

$X \cdot Y$ fiind produsul scalar în sensul metricii (1) şi $\overline{XY}$ fiind norma punctelor X şi Y.

b) În cazul relativităţii restrînse, am considerat forma invariantă a spaţiului

$$c^2t^2 - x^2 - y^2 - z^2 \tag{6}$$

căreia îi corespunde forma diferenţială

$$\varphi = c^2dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2 \tag{7}$$

şi metrica

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 - c^2dt^2. \tag{8}$$

Punînd

$$x^0 = ct, \ x^2 = x, \ x^2 = y, \ x^3 = z \tag{9}$$

formele (6) şi (2) coincid.

Deci *metrica relativităţii restrînse este metrica iperbolică*. În acest mod, există un izomorfism între mecanica relativităţii restrînse şi spaţiul iperbolic, în sensul că oricărui eveniment îi corespunde o proprietate geometrică iperbolică şi reciproc.

Traiectoria unui eveniment este o curbă în spaţiul iperbolic. Deci *geometria iperbolică este geometria naturală a mecanicii relativităţii restrînse* în acelaşi mod în care geometria euclidiană este geometria naturală a mecanicii newtoniene.

În particular *unei transformări Lorentz îi corespunde o deplasare iperbolică.*

Normarea (1) impune condiţia

$$(x^0)^2 \geqslant (x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2 \tag{10}$$

sau, conform cu (9),

$$x^2 + y^2 + z^2 \leqslant c^2t^2, \tag{11}$$

relaţie care (I.5.d) este echivalentă cu cerinţa ca vitezele să fie inferioare vitezei luminii.

c) Interpretarea neeuclidiană este mai indicată, deoarece ne menţinem într-un spaţiu cu trei dimensiuni (raportat la coordonate

omogene) iar geometria iperbolică nu este formală ca o geometrie n-dimensională, ci o geometrie cu aceleași drepturi de a fi admisă, din punct de vedere logic, ca și geometria euclidiană, pe care dealtfel o cuprinde ca un caz limită, dar este mai fină și mai simetrică decît geometria euclidiană.

Este evident că izomorfismul subliniat dintre geometria iperbolică și mecanica relativității restrînse este integral. Vom releva numai cîteva aspecte.

2. Interpretarea ecuațiilor Lorentz. a) În teoria relativității restrînse, considerînd o particulă elementară de masă m, care se mișcă cu viteza $\bar{v}$ într-un cîmp electromagnetic, format din cîmpul electric $\bar{E}$ și magnetic $\bar{H}$ iar e fiind sarcina particulei și c viteza luminii, am admis din considerații fizice, că particula se mișcă sub acțiunea forței

$$\bar{F} = e\,\bar{E} + \frac{e}{c}\,\bar{v} \times \bar{H}. \tag{1}$$

Proiectînd ecuațiile Lorentz (1) pe axele de coordonate și adăugînd și legea conform căreia variația energiei $E = mc^2$ este egală cu lucrul mecanic elementar al forței $\bar{F}$, care se reduce la $e\,\bar{E}\cdot \mathrm{d}\bar{r}$, am scris aceste legi sub forma tensorială [(3) din I.B.]

$$\mathrm{d}(E_0 t_i) = c\,F_{ij}\mathrm{d}x^j, \tag{2}$$

unde $E_0 = m_0c^2$ este energia în repaus iar t_i componentele covariante ale versorului tangentei la traiectoria particulei și F_{ij} componentele tensorului electromagnetic, date de

$$\begin{pmatrix} F_{00} & F_{01} & F_{02} & F_{03} \\ F_{10} & F_{11} & F_{12} & F_{13} \\ F_{20} & F_{21} & F_{22} & F_{23} \\ F_{30} & F_{31} & F_{32} & F_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -E_x & -E_y & -E_z \\ E_x & 0 & H_z & -H_y \\ E_y & -H_z & 0 & H_x \\ E_z & H_y & -H_x & 0 \end{pmatrix}. \tag{3}$$

Matricea (F_{ij}) este strîmb simetrică. Structura (3) este lesne de justificat punînd

$$F_{10} = E_x,\ F_{20} = E_y,\ F_{30} = E_z \tag{4}$$

$$F_{23} = H_x,\ F_{31} = H_y,\ F_{12} = H_z. \tag{5}$$

b) Este știut că determinantul unei matrice pătrate strîmb simetrice de ordin par este pătrat perfect, anume

$$|F_{ij}| = (E_xH_x + E_yH_y + E_zH_z)^2. \tag{6}$$

Deoarece $E_0 = H_0 = 0$, rezultă că în partea a doua avem produsul scalar al cîmpurilor, $\bar{E}$, $\bar{H}$ indiferent că le privim euclidian sau neeuclidian. Pe de altă parte determinantul este invariant la o transformare pseudoortogonală; rezultă că

$$\bar{E}\cdot\bar{H} = \text{const}. \tag{7}$$

De asemenea, deoarece transformările pseudoortogonale invariază matricea formei fundamentale

$$(a_{ij}) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \tag{8}$$

invariază și expresiile alcătuite prin împletirea coloanelor

$$i_1 = \Sigma \begin{vmatrix} a_{00} & F_{01} & F_{02} & F_{03} \\ a_{10} & F_{11} & F_{12} & F_{13} \\ a_{20} & F_{21} & F_{22} & F_{23} \\ a_{30} & F_{31} & F_{32} & F_{33} \end{vmatrix},\quad i_2 = \Sigma \begin{vmatrix} a_{00} & a_{01} & F_{02} & F_{03} \\ a_{10} & a_{11} & F_{12} & F_{13} \\ a_{20} & a_{21} & F_{22} & F_{23} \\ a_{30} & a_{31} & F_{32} & F_{33} \end{vmatrix}$$

(9)

$$i_3 = \Sigma \begin{vmatrix} a_{00} & a_{01} & a_{02} & F_{03} \\ a_{10} & a_{11} & a_{12} & F_{13} \\ a_{20} & a_{21} & a_{22} & F_{23} \\ a_{30} & a_{31} & a_{32} & F_{33} \end{vmatrix}.$$

Aici i_1 şi i_3 sînt evident nule, iar i_2 devine

$$i_2 = E_1^2 + E_2^2 + E_3^2 - H_1^2 - H_2^2 - H_3^2, \tag{10}$$

deci

$$E^2 - H^2 = \text{const.} \tag{11}$$

c) Pentru a da o interpretare geometrică ecuaţiilor Lorentz intr-un spaţiu neeuclidian, este suficient să ataşăm acestui spaţiu pe o cale naturală un tensor strîmb simetric.

De exemplu, M fiind un punct al unei curbe c, iar M_1, M_2 M_3 puncte ortogonale lui M şi ortogonale între ele, obţinem o configuraţie Myller cu formulele fundamentale

(12)

	M	M_1	M_2	M_3
$\frac{dM}{ds}$		α_{11}	α_{21}	α_{31}
$\frac{dM_1}{ds}$	$-\alpha_{11}$		ρ'	$-\sigma'$
$\frac{dM_2}{ds}$	$-\alpha_{21}$	$-\rho'$		τ'
$\frac{dM_3}{ds}$	$-\alpha_{31}$	σ'	τ'	

Coeficienţii au semnificaţii geometrice iar tabelul lor are forma (3) a componentelor tensorului electromagnetic. Invarianţii (7), (10) devin

$$\alpha_{11}\tau' + \alpha_{21}\sigma' + \alpha_{31}\rho' = \tau \tag{13}$$

$$\tau'^2 + \sigma'^2 + \rho'^2 = \tau^2 + \rho^2. \tag{14}$$

Referitor la tetraedrul $MM_1M_2M_3$ ecuaţiile Lorentz exprimă că

$$\begin{gathered} \alpha_{11}dx^1 + \alpha_{21}dx^2 + \alpha_{31}dx^3 \\ -\alpha_{11}dx^0 + \rho'\, dx^2 - \sigma'\, dx^3 \\ -\alpha_{21}dx^0 - \rho'\, dx^1 + \tau'\, dx^3 \\ -\alpha_{31}dx^0 + \sigma'\, dx^2 - \tau'\, dx^2 \end{gathered} \tag{15}$$

sînt diferenţiale exacte.

d) Pentru o anumită poziţie a tetraedrului mobil $MM_1M_2M_3$ care corespunde tangentei, normalei principale şi binormalei, sistemul (12) ia forma canonică Frenet

$$\begin{pmatrix} 0 & i & 0 & 0 \\ -i & 0 & \rho & 0 \\ 0 & -\rho & 0 & \tau \\ 0 & 0 & -\tau & 0 \end{pmatrix}. \tag{16}$$

Corespunzător, putem să determinăm un reper în care cîmpul electromagnetic să aibă o formă canonică. Dispunînd de trei parametri, îi putem determina astfel ca $E_y = E_z = H_y = 0$. Punînd numai condiţia ca $E_z = H_y = 0$, reperele depind de un parametru iar condiţia este conservată de transformările Lorentz.

e) Din punct de vedere cinematic, considerăm deplasarea

$$x'^{\alpha} = a_{\beta}^{\alpha} x^{\beta} \tag{17}$$

care conservă forma

$$\varepsilon_0(x^0)^2 + \varepsilon_1(x^1)^2 + \varepsilon_2(x^2)^2 + \varepsilon_3(x^3)^2, \tag{18}$$

$$\varepsilon_0 = 1, \quad \varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon_3 = -1.$$

Avem deci condiţiile de pseudoortogonalitate

$$\varepsilon_{\alpha} a_{\beta}^{\alpha} a_{\gamma}^{\alpha} = \delta'_{\beta\gamma}, \tag{19}$$

unde

$$\delta'_{\beta\gamma} = \begin{cases} \varepsilon_{\beta} \text{ pentru } \gamma = \beta, \\ 0 \text{ pentru } \gamma \neq \beta. \end{cases} \tag{20}$$

Considerăm transformarea vecină de transformarea identică

$$a_{\beta}^{\alpha} = \delta_{\beta}^{\alpha} + \omega_{\beta}^{\alpha}, \tag{21}$$

unde ω_{β}^{α} sînt infinitezimale. Din condiţia (19),

$$\varepsilon_{\alpha}(\delta_{\beta}^{\alpha} + \omega_{\beta}^{\alpha})(\delta_{\gamma}^{\alpha} + \omega_{\gamma}^{\alpha}) = \delta'_{\beta\gamma},$$

$$\varepsilon_{\alpha}\delta_{\beta}^{\alpha}\delta_{\gamma}^{\alpha} + \varepsilon_{\alpha}(\delta_{\beta}^{\alpha}\omega_{\gamma}^{\alpha} + \delta_{\gamma}^{\alpha}\omega_{\beta}^{\alpha}) = \varepsilon_{\beta}\,\delta_{\beta\gamma},$$

$$\varepsilon_{\beta}\delta_{\gamma}^{\beta} + \omega_{\gamma}^{\beta} + \omega_{\beta}^{\gamma} = \varepsilon_{\beta}\delta_{\beta\gamma},$$

deci

(22) $$\omega^{\beta}_{\gamma} + \omega^{\gamma}_{\beta} = 0.$$

Avem deci şase componente distincte ω^{β}_{γ}.

Înlocuind valorile (21) în expresia (17), avem

(23) $$x'^{\alpha} = x^{\alpha} + \omega^{\alpha}_{\beta} x^{\beta}$$

sau, separat:

(24) $$x'^{0} = x^{0} + \omega^{\alpha}_{i} x^{i}, \quad x'^{i} = x^{i} + \omega^{i}_{0} x^{0} + \omega^{i}_{j} x^{j}$$

$(i, j = 1, 2, 3, 4, \ i \neq j)$.

Avem de considerat deci o translaţie a originii (aici punctul M), deci ω^{α}_{i} nule:

(25) $$x'^{0} = x^{0}, \quad x'^{i} = x^{i} + \omega^{i}_{0} x^{0}$$

şi o rotaţie infinitezimală

(26) $$x'^{0} = x^{0} + \omega^{\alpha}_{i} x^{i}, \quad x'^{i} = x^{i} + \omega^{\alpha}_{j} x^{j}.$$

În (25),

$$\omega^{i}_{0} = \frac{x'^{i} - x^{i}}{x^{0}} = \frac{1}{c}\frac{\Delta x^{i}}{t} = \frac{v^{i}}{c},$$

deci

(27) $$\omega^{1}_{0} = \frac{v_x}{c}, \quad \omega^{2}_{0} = \frac{v_y}{c}, \quad \omega^{3}_{0} = \frac{v_z}{c}.$$

Rotaţia infinitezimală a sistemului de axe este dată de

$$\Delta\bar{r} = \bar{\omega} \times \bar{r},$$

ω fiind vectorul de rotaţie, deci

$$\Delta\bar{r} = \begin{vmatrix} I & J & K \\ \omega_x & \omega_y & \omega_z \\ x & y & z \end{vmatrix}$$

şi proiectînd pe axe,

$$x' - x = z\omega_y - y\omega_z$$

etc. Deci

(28) $$\omega^{1}_{2} = -\omega_z, \quad \omega^{1}_{3} = \omega_y, \quad \omega^{2}_{3} = -\omega_x.$$

În concluzie

(29) $$(\omega^{\alpha}_{\beta}) = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{v_x}{c} & -\frac{v_y}{c} & -\frac{v_z}{c} \\ \frac{v_x}{c} & 0 & -\omega_z & \omega_y \\ \frac{v_y}{c} & \omega_z & 0 & -\omega_x \\ \frac{v_z}{c} & -\omega_y & \omega_x & 0 \end{pmatrix}.$$

Matricea $(\omega^{\alpha}_{\beta})$ are deci structura cîmpului electromagnetic în ecuaţiile Lorentz. Acest rezultat este natural, deoarece o transformare infinitezimală în mecanica relativităţii restrînse corespunde trecerii de la un reper Myller la altul, în spaţiul neeuclidian.

3. Interpretarea formulei de compunere a vitezelor. a) Putem să dezvoltăm mecanica relativităţii restrînse pe calea obişnuită a mecanicii clasice, însă într-un spaţiu iperbolic.

Unui punct $M(x^0, x^1, x^2, x^3)$ din spaţiul neeuclidian cu trei dimensiuni, în coordonate omogene, îi punem în corespondenţă vectorul de coordonate omogene $V(c, v^1, v^2, v^3)$, al unui mobil din spaţiul relativităţii restrînse, unde v^i sînt coordonatele neomogene ale vitezei V. Realizăm o corespondenţă simplu, prin

(1) $$x^0 = \rho c, \quad x^1 = \rho v^1, \quad x^2 = \rho v^2, \quad x^3 = \rho v^3,$$

ρ fiind un factor; prin condiţia de normare

$$(x^0)^2 + \varepsilon^2[(x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2] = 1$$

rezultă

(2) $$\rho^2(c^2 + \varepsilon^2 v^2) = 1$$

sau, ținînd seama de formula

$$ds^2 = q^2(dx^0)^2 + (dx^1)^2 + (dx^2)^2 + (dx^3)^2,$$

care conduce la metrica relativistă $ds^2 = q^2\, dt^2(c^2 + \varepsilon^2 v^2)$, rezultă că putem să luăm

$$\frac{1}{\rho} = \varepsilon \frac{ds}{dt}. \tag{3}$$

Normarea diferă evident de la punct la punct, dar din cauza omogenității, factorii de normare nu apar în formulele finale.

Punctelor absolutului le corespund viteze relativiste

$$v^2 = -c^2 q^2 \tag{4}$$

și reciproc.

b) În spațiul neeuclidian putem să exprimăm distanțele dintre punctele M_1, M_2 prin

$$\cos \frac{M_1 M_2}{q} = M_1 \cdot M_2 \quad \text{sau} \quad \sin \frac{M_1 M_2}{q} = \overline{M_1 M_2},$$

de unde

$$\operatorname{tg} \frac{M_1 M_2}{q} = \frac{\overline{M_1 M_2}}{M_1 \cdot M_2},$$

și conform formulelor (1)

$$\operatorname{tg} \frac{M_1 M_2}{q} = \frac{\overline{V_1 V_2}}{V_1 \cdot V_2}. \tag{5}$$

Între lungimea euclidiană ε și neeuclidiană l a aceluiași segment avem relația

$$a = q \operatorname{tg} \frac{l}{q}.$$

Deoarece distanței neeuclidiene $M_1 M_2$ îi corespunde viteza relativă v_{12}/c dintre punctele mobile corespunzătoare, avem

$$v = cq \operatorname{tg} \frac{M_1 M_2}{q}. \tag{6}$$

Obținem *formula care dă viteza relativă*

$$v_{12} = cq \frac{\overline{V_1 V_2}}{V_1 \cdot V_2}. \tag{7}$$

De asemenea unghiul neeuclidian a două direcții MM_1, MM_2 este dat de

$$\cos \theta = \frac{\overline{(MM_1) \cdot (MM_2)}}{\overline{MM_1}\ \overline{MM_2}} \quad \text{sau} \quad \sin \theta = \frac{\overline{MM_1 M_2}}{\overline{MM_1}\ \overline{MM_2}}.$$

Dacă M corespunde unui punct mobil cu viteza V iar $M_1 M_2$ vitezelor V_1, V_2 obținem *formula unghiului format de vitezele relative a două mobile*

$$\cos \theta = \frac{\overline{(VV_1) \cdot (VV_2)}}{\overline{VV_1}\ \overline{VV_2}}. \tag{8}$$

au

$$\sin \theta = \frac{\overline{VV_1 V_2}}{\overline{VV_1}\ \overline{VV_2}}. \tag{9}$$

În aceste formule, produsele scalare și normele sînt considerate în sensul metricii neeuclidiene.

c) Să detaliem formulele. Avem

$$V_1 \cdot V_2 = \rho_1 \rho_2 (c^2 + \varepsilon^2 \bar{v}_1 \bar{v}_2),$$

notînd prin $\bar{v}_1 \cdot \bar{v}_2$ produsul scalar în sensul metricii euclidiene; de asemenea

$$\overline{V_1 V_2^2} = \text{normă}^2 \begin{pmatrix} \rho_1 c & \rho_1 \varepsilon v_1^1 & \rho_1 \varepsilon v_1^2 & \rho_1 \varepsilon v_1^3 \\ \rho_2 c & \rho_2 \varepsilon v_2^1 & \rho_2 \varepsilon v_2^2 & \rho_2 \varepsilon v_2^3 \end{pmatrix} =$$

$$= \varepsilon^2 \rho_1^2 \rho_2^2 c^2 \Sigma (v_2^1 - v_1^1)^2 + \rho_1^2 \rho_2^2 \varepsilon^4 \Sigma \begin{vmatrix} v_1^1 & v_1^2 \\ v_2^1 & v_2^2 \end{vmatrix}^2,$$

deci

$$\overline{V_1 V_2^2} = \varepsilon^2 \rho_1^2 \rho_2^2 [c^2(\bar{v}_2 - \bar{v}_1)^2 + \varepsilon^2 (\bar{v}_1 \times \bar{v}_2)^2], \tag{10}$$

notînd prin $\bar{v}_1 \times \bar{v}_2$ produsul vectorial euclidian dintre $\bar{v}_1$, $\bar{v}_2$.

Dacă punctele M_1, M_2 sînt vecine, avem aceeaşi situaţie pentru vitezele corespunzătoare:

$$\bar{v}_2 = \bar{v}_1 + \Delta\bar{v}_1;$$

atunci, notînd $\bar{v}_1 = \bar{v}$, conform formulelor precedente,

$$V_1 \cdot V_2 \to \rho_1\rho_2(c^2 + \varepsilon^2 v^2)$$

$$\overline{V_1 V_2^2} \to \varepsilon^2 \rho_1^2 \rho_2^2 [c^2 dv^2 + \varepsilon^2(\bar{v} \times d\bar{v})^2]$$

şi formula (7) devine

$$d\bar{v}_{12}^2 = \frac{d\bar{v}^2 + \dfrac{1}{c^2q^2}(\bar{v} \times d\bar{v})^2}{\left(1 + \dfrac{1}{c^2q^2}\bar{v}^2\right)^2}. \tag{17}$$

Pentru $q \to \infty$, (14) devine formula clasică

$$\cos\theta = \frac{(\bar{v}_1 - \bar{v}) \cdot (\bar{v}_2 - \bar{v})}{|\bar{v}_1 - \bar{v}|\,|\bar{v}_2 - \bar{v}|}$$

din nou, fără consideraţii suplimentare relativ la c.

4. Interpretarea formulei aberaţiei luminii. Presupunem că sîntem într-un spaţiu iperbolic, în care luăm $\varepsilon^2 = -1$, deci şi $q^2 = -1$, sub formă canonică.

Vom face o aplicaţie pentru aberaţia astronomică.

Direcţiile spre aceeaşi stea, pornind din două puncte mobile diferite, nu coincid. Diferenţa mărimilor acestor unghiuri este *aberaţia astronomică.*

Reprezentăm vitezele mobilelor prin puncte în spaţiul iperbolic.

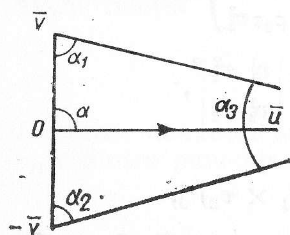


Fig. 10

Alegem originea astfel ca vitezele punctelor să fie opuse: $\bar{v}_1 = \bar{v}$, $\bar{v}_2 = -\bar{v}$ şi viteza razei de lumină o notăm $\bar{a}c$, $\bar{a}$ fiind vectorul unitar al razei (fig. 10). Notăm cu α_1, α_2, α_3 unghiurile din $\bar{v}$, $-\bar{v}$ şi $\bar{u}$ ale triunghiului corespunzător şi cu α unghiul dintre direcţiile $\bar{v}$ şi $\bar{a}$; u fiind situat pe absolut, evident, $\alpha_3 = 0$.

şi *formula unghiului format de vitezele relative a două mobile*

$$\cos\theta = \frac{(\bar{v}_1 - \bar{v})(\bar{v}_2 - \bar{v}) + \dfrac{1}{c^2q^2}(\bar{v}_1 \times \bar{v}) \cdot (\bar{v}_2 \times \bar{v})}{\sqrt{(\bar{v}_1 - \bar{v})^2 + \dfrac{1}{c^2q^2}(\bar{v}_1 \times \bar{v})^2}\sqrt{(\bar{v}_2 - \bar{v})^2 + \dfrac{1}{c^2q^2}(\bar{v}_2 \times \bar{v})^2}} \tag{14}$$

sau

(15)

$$\sin^2\theta = \left(1 + \frac{v^2}{c^2q^2}\right)\frac{[(\bar{v}_1 - \bar{v}) \times (\bar{v}_2 - \bar{v})]^2 + \dfrac{1}{c^2q^2}(\bar{v}\bar{v}_1\bar{v}_2)^2}{\left[(\bar{v}_1 - \bar{v})^2 + \dfrac{1}{c^2q^2}(\bar{v}_1 \times \bar{v})^2\right]\left[(\bar{v}_2 - \bar{v})^2 + \dfrac{1}{c^2q^2}(\bar{v}_2 \times \bar{v})^2\right]}.$$

Pentru $q^2 = -1$ obţinem formulele din mecanica relativistă.

Pentru $q \to \infty$ obţinem formulele mecanicii clasice.

Deci *independent de orice consideraţii privind viteza luminii, cînd spaţiul neeuclidian devine euclidian, mecanica relativistă devine mecanica clasică.*

Observăm de asemenea, că uzilizînd noţiunile şi notaţiile neeuclidiene, formulele (7) — (9) sînt foarte mult simplificate.

e) Pentru punctele M_1, M_2, M_3 colineare în această ordine, avem $M_1M_2 + M_2M_3 = M_1M_3$, deci

$$\operatorname{tg}\frac{M_1M_3}{q} = \frac{\operatorname{tg}\dfrac{M_1M_2}{q} + \operatorname{tg}\dfrac{M_2M_3}{q}}{1 - \operatorname{tg}\dfrac{M_1M_2}{q}\operatorname{tg}\dfrac{M_2M_3}{q}}$$

şi conform cu (6) obţinem formula de adunare a vitezelor colineare

$$\bar{v}_{13} = \frac{\bar{v}_{12} + \bar{v}_{23}}{1 - \dfrac{1}{c^2q^2}\bar{v}_{12} \cdot \bar{v}_{23}} \tag{16}$$

dealtfel, cuprinsă în (13) pentru

$$v_1 = v_{12}, \quad v_2 = -v_{23}, \quad v_{12} \to v_{13}.$$

În continuare

$$(VV_1)\cdot(VV_2) = \begin{pmatrix} \rho\, c & \rho\, \varepsilon v^1 & \rho\, \varepsilon v^2 & \rho\, \varepsilon v^3 \\ \rho_1 c & \rho_1 \varepsilon v_1^1 & \rho_1 \varepsilon v_1^2 & \rho_1 \varepsilon v_1^3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \rho\, c & \rho \varepsilon v^1 & \rho\, \varepsilon v^2 & \rho\, \varepsilon v^3 \\ \rho_2 c & \rho_2 \varepsilon v_2^1 & \rho_2 \varepsilon v_2^2 & \rho_2 \varepsilon v_2^3 \end{pmatrix}.$$

Conform identității Binet

$$\overline{(VV_1)\cdot(VV_2)} = \rho^2 \rho_1 \rho_2 \left[\Sigma \begin{vmatrix} c & \varepsilon v^i \\ c & \varepsilon v_2^i \end{vmatrix} \begin{vmatrix} c & \varepsilon v^i \\ c & \varepsilon v_1^i \end{vmatrix} + \Sigma \begin{vmatrix} \varepsilon v^i & \varepsilon v^j \\ \varepsilon v_1^i & \varepsilon v_1^j \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \varepsilon v^i & \varepsilon v^j \\ \varepsilon v_2^i & \varepsilon v_2^j \end{vmatrix}\right] =$$

$$= \rho^2 \rho_1 \rho_2 \left[\Sigma \varepsilon^2 c^2 (v_1^i - v^i)(v_2^i - v^i) + \varepsilon^4 \Sigma \begin{vmatrix} v^i & v^j \\ v_1^i & v_1^j \end{vmatrix} \begin{vmatrix} v^i & v^j \\ v_2^i & v_2^j \end{vmatrix}\right],$$

deci

(11) $\overline{(VV_1)\cdot(VV_2)} = \rho^2 \rho_1 \rho_2 \varepsilon^2\ [c^2(\bar{v}_1 - \bar{v})\cdot(\bar{v}_2 - \bar{v}) + \varepsilon^2(\bar{v}_1 \times \bar{v})\cdot(\bar{v}_2 \times \bar{v})]$,

produsele scalare și vectoriale fiind luate în sens euclidian. În fine

$$\overline{VV_1V_2^2} = \text{normă}^2 \begin{pmatrix} \rho\, c & \rho\, \varepsilon v^1 & \rho\, \varepsilon v^2 & \rho\, \varepsilon v^3 \\ \rho_1 c & \rho_1 \varepsilon v_1^1 & \rho_1 \varepsilon v_1^2 & \rho_1 \varepsilon v_1^3 \\ \rho_2 c & \rho_2 \varepsilon v_2^1 & \rho_2 \varepsilon v_2^2 & \rho_2 \varepsilon v_2^3 \end{pmatrix} =$$

$$= \rho^2 \rho_1^2 \rho_2^2 \left[\varepsilon^6 \begin{vmatrix} v^1 & v^2 & v^3 \\ v_1^1 & v_1^2 & v_1^3 \\ v_2^1 & v_2^2 & v_2^3 \end{vmatrix}^2 + c^2 \varepsilon^4 \Sigma \begin{vmatrix} 1 & v^1 & v^2 \\ 1 & v_1^1 & v_1^2 \\ 1 & v_2^1 & v_2^2 \end{vmatrix}^2 \right],$$

deci

(12) $\overline{VV_1V_2} = \rho^2 \rho_1^2 \rho_2^2 \{\varepsilon^2(\bar{v}\bar{v}_1\bar{v}_2)^2 + c^2[(\bar{v}_1 - \bar{v}) \times (\bar{v}_2 - \bar{v})]^2\}$,

(vv_1v_2) fiind notația produsului mixt al vectorilor, în sens euclidian.

d) Obținem *formula compunerii vitezelor*

(13) $$v_{12}^2 = \frac{(\bar{v}_2 - \bar{v}_1)^2 + \dfrac{1}{c^2 q^2}(\bar{v}_1 \times \bar{v}_2)^2}{\left[1 + \dfrac{1}{c^2 q^2}(\bar{v}_1 \cdot \bar{v}_2)\right]^2}$$

Aplicăm formula (14), pentru $q^2 = -1$, $\theta = \alpha_1$, deci vectorii $\bar{u} = \bar{v}$, $\bar{v}_1 = \bar{a}c$, $\bar{v}_2 = -\bar{v}$; obținem

(1) $$\cos \alpha_1 = \frac{\bar{v} \cdot (\bar{v} - \bar{a}c)}{v \sqrt{(\bar{a}c - \bar{v})^2 - \dfrac{1}{c^2}(\bar{a}c \times \bar{v})^2}}$$

dar $\bar{a} \cdot \bar{v} = v \cos \alpha$ și sub radical avem

$$c^2 + v^2 - 2cv \cos \alpha - v^2 \sin^2 \alpha = (c - v \cos \alpha)^2,$$

deci

(2) $$\cos \alpha_1 = \frac{v - c \cos \alpha}{c - v \cos \alpha},$$

de unde

(3) $$\sin \alpha_1 = \frac{\sqrt{c^2 - v^2} \sin \alpha}{c - v \cos \alpha}.$$

Înlocuind pe v prin $-v$, avem și

(4) $$\sin \alpha_2 = \frac{\sqrt{c^2 - v^2} \sin \alpha}{c + v \cos \alpha}, \quad \cos \alpha_2 = \frac{v + c \cos \alpha}{c + v \cos \alpha}.$$

Aberația este defectul triunghiului iperbolic; deci

(5) $$\delta = \pi - \alpha_1 - \alpha_2 - \alpha_3 = \pi - (\alpha_1 + \alpha_3)$$

Avem

(6) $$\cos(\alpha_1 + \alpha_2) = \frac{v^2 - c^2 + v^2 \sin^2 \alpha}{c^2 - v^2 \cos^2 \alpha}.$$

Rezultă

$$1 + \cos(\alpha_1 + \alpha_2) = \frac{2v^2 \sin^2 \alpha}{c^2 - v^2 \cos^2 \alpha},$$

$$1 - \cos(\alpha_1 + \alpha_2) = \frac{2(c^2 - v^2)}{c^2 - v^2 \cos^2 \alpha},$$

deci

(7) $$\operatorname{tg}\frac{\delta}{2} = \frac{v \sin\alpha}{\sqrt{c^2 - v^2}}.$$

Unghiul δ fiind mic şi $v \ll c$, avem

$$\frac{\delta}{2} \approx \frac{v}{c}\sin\alpha\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-\frac{1}{2}} \approx \frac{v}{c}\sin\alpha\left(1 + \frac{v^2}{2c^2} + \ldots\right)$$

deci [I.A.4, (18)]

(8) $$\delta \approx 2\frac{v}{c}\sin\alpha.$$

5. Indicaţii bibliografice. Pentru corelaţia dintre geometria iperbolică şi mecanica relativităţii restrinse să se consulte lucrările:

K o t e l n i k o v, A. P. *Prinţipii otnositelnosti v geometrii Lobacevskogo*. Kazan, 1927. În volumul: In memoriam N. I. Lobacevskii, 2, p. 37–66.

F o k, A. V. *Teoria spaţiului, timpului şi a gravitaţiei* (trad. din l. rusă). Bucureşti, Editura ştiinţifică, 1962.

C e r n i k o v N. A., *Stohasticeskoe dvijenie reliativistskoi ciastiţi*. Dubna, 1957.

M i h ă i l e a n u, N. *Interpretare geometrică a ecuaţiilor Lorentz*. Analele Univ. Bucureşti, 17, I, 1968, p. 49–52.

M i h ă i l e a n u N. *Despre spaţiul Lobacevski–Einstein*. Analele Univ. Bucureşti, 17, II, 1968, p. 39–43.

B. METRICĂ CU SIMETRIE SFERICĂ GENERALĂ

1. Formă redusă. a) O metrică riemanniană

(1) $$ds^2 = g_{ij}dx^i dx^j \quad (i, j = 0, 1, 2, 3)$$

şi g_{ij} funcţii de x^0, x^1, x^2, x^3 este cu simetrie sferică, dacă pentru $x^0 = \text{const}$ obţinem o metrică de rotaţie în spaţiul euclidian al variabilelor x^1, x^2, x^3.

Trebuie să avem deci, după un raţionament cunoscut (I.D.1)

$$ds^2 = g_{00}(dx^0)^2 + g_{11}(dx^1)^2 + g_{22}[(dx^2)^2 + \sin^2 x^2 (dx^3)^2],$$

unde g_{00}, g_{11}, g_{22} depind numai de $x^0 = ct$, $x^1 = r$.

Ca să nu ne îndepărtăm prea mult de metrica relativităţii restrînse, vom scrie

(2) $$ds^2 = -V^2(dx^0)^2 + A^2(dx^1)^2 + B^2[(dx^2)^2 + \sin^2 x^2(dx^3)^2],$$

unde V, A, B sînt funcţii numai de x^0, x^1.

b) Să cercetăm dacă putem să facem o schimbare de variabile

(3) $$x'^0 = f(x^0, x^1),\ x'^1 = B(x^0, x^1),\ x'^2 = x^2,\ x'^3 = x^3,$$

adică să determinăm funcţia f, astfel ca noua valoare a coeficientului B să nu mai depindă de x^0. Presupunem că

(4) $$\frac{\partial(x'^0, x'^1)}{\partial(x^0, x^1)} = f_0 B_1 - f_1 B_0 \neq 0.$$

unde am notat

(5) $$f_i = \frac{\partial f}{\partial x^i},\quad B_i = \frac{\partial B}{\partial x^i},\quad (i = 0, 1).$$

Condiţia cerută revine la

$$V'^2(dx'^0)^2 - A'^2(dx'^1)^2 = V^2(dx^0)^2 - A^2(dx^1)^2,$$

dar

$$dx'^0 = f_0 dx^0 + f_1 dx^1,\quad dx'^1 = B_0 dx^0 + B_1 dx^1.$$

Rezultă

(6) $$\begin{aligned} V'^2 f_1^2 - A'^2 B_1^2 &= -A^2 \\ V'^2 f_0 f_1 - A'^2 B_0 B_1 &= 0 \\ V'^2 f_0^2 - A'^2 B_0^2 &= V^2. \end{aligned}$$

Rezolvăm prima şi a treia relaţie în raport cu A'^2, V'^2. Determinantul sistemului este

$$\begin{vmatrix} f_0^2 & B_0^2 \\ f_1^2 & B_1^2 \end{vmatrix} = (f_0 B_1 - f_1 B_0)(f_0 B_1 + f_1 B_0);$$

prima paranteză este diferită de zero, conform cu (4). Trebuie să punem şi condiţia

(7) $$f_0 B_1 + f_1 B_0 \neq 0$$

Eliminînd pe V'^2, A'^2 în sistemul (6), obținem

$$\begin{vmatrix} f_0^2 & B_0^2 & -V^2 \\ f_0 f_1 & B_0 B_1 & 0 \\ f_1^2 & B_1^2 & A^2 \end{vmatrix} = (f_0 B_1 - f_1 B_0)(B_1 f_1 V^2 - B_0 f_0 A^2) = 0\,;$$

primul factor fiind diferit de zero, rămîne

(8) $$\frac{f_0}{B_1 V^2} = \frac{f_1}{A^2 B_0}.$$

Condiția (7) devine atunci

$$A^2 B_0^2 + B_1^2 V^2 \neq 0$$

verificată de la sine, iar din (4)

(9) $$A^2 B_0^2 - B_1^2 V^2 \neq 0.$$

Deci *dacă are loc relația* (9), *putem să reducem pe* B *la* x^1. Obținem funcția f prin integrarea ecuației (8) cu derivate parțiale.

c) Dacă relația (9) nu are loc, punem

$$\frac{V^2}{B_0^2} = \frac{A^2}{B_1^2} = m^2$$

și atunci metrica are forma

(10) $$ds^2 = -m^2 B_0^2 (dx^0)^2 + m^2 B_1^2 (dx^1)^2 - B^2[(dx^2)^2 + \sin^2 x^2 (dx^3)^2],$$

care conține funcțiile arbitrare m și B. Dacă B nu depinde de x^1 ci de x^0, putem să ne aranjăm astfel ca B să fie egal cu x^0. Dacă B este constant, putem să-l reducem la valoarea 1.

Deci *dacă metrica* (2) *nu are forma* (10), *printr-o transformare de variabile putem să-l reducem pe* B *la* x^1, *la* x^0 *sau la* 1. (G. Vrănceanu, 1966).

2. Simbolurile Christoffel. a) În cazul general avem deci metrica cu simetrie sferică redusă la forma

(1) $$ds^2 = -V^2(dx^0)^2 + A^2(dx^1)^2 + (x^1)^2[(dx^2)^2 + \sin^2 x^2 (dx^3)^2]$$

unde V și A sînt funcții de (x^0, x^1). Avem deci o metrică de forma

(2) $$ds^2 = g_{00}(dx^0)^2 + g_{11}(dx^1)^2 + g_{22}(dx^2)^2 + g_{33}(dx^3)^2,$$

unde

(3) $$g_{00} = -V^2, \quad g_{11} = A^2, \quad g_{22} = (x^1)^2, \quad g_{33} = (x^1)^2 \sin^2 x^2.$$

Avem atunci

$$g = \begin{vmatrix} g_{00} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & g_{11} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & g_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & g_{33} \end{vmatrix} = g_{00} g_{11} g_{22} g_{33},$$

(4) $$g^{ii} = \frac{1}{g_{ii}}.$$

Calculăm simbolurile Christoffel cu doi indici egali:

(5) $$(iij) = -\frac{1}{2}\frac{\partial g_{ii}}{\partial x^j}, \; i \neq j,$$

(6) $$\begin{Bmatrix} j \\ i\;\; i \end{Bmatrix} = g^{jj}(iij) = -\frac{1}{2g_{jj}}\frac{\partial g_{ii}}{\partial x^j}, \; i \neq j,$$

(7) $$(iji) = \frac{1}{2}\frac{\partial g_{ii}}{\partial x^j}$$

indiferent dacă $i = j$ sau $i \neq j$,

(8) $$\begin{Bmatrix} i \\ i\;\; j \end{Bmatrix} = g^{ii}(iji) = \frac{1}{2g_{ii}}\frac{\partial g_{ii}}{\partial x^j}, \; i = j, \text{ sau } i \neq j.$$

Simbolurile Christoffel cu trei indici distincți sînt nule.

b) Pentru metrica (1) *singurele simbolouri nenule sînt*

(9) $$\begin{Bmatrix} 0 \\ 0\;\; 0 \end{Bmatrix} = \frac{V_0}{V}, \quad \begin{Bmatrix} 1 \\ 0\;\; 0 \end{Bmatrix} = \frac{VV_1}{A^2}, \quad \begin{Bmatrix} 0 \\ 0\;\; 1 \end{Bmatrix} = \frac{V_1}{V},$$

(10) $$\begin{Bmatrix} 1 \\ 0\;\; 1 \end{Bmatrix} = \frac{A_0}{A}, \quad \begin{Bmatrix} 0 \\ 1\;\; 1 \end{Bmatrix} = \frac{AA_0}{V^2}, \quad \begin{Bmatrix} 1 \\ 1\;\; 1 \end{Bmatrix} = \frac{A_1}{A},$$

(11) $$\begin{Bmatrix} 1 \\ 2\;\; 2 \end{Bmatrix} = -\frac{x^1}{A^2}, \quad \begin{Bmatrix} 1 \\ 3\;\; 3 \end{Bmatrix} = -\frac{x^1}{A^2}\sin^2 x^2,$$

(12) $$\begin{Bmatrix} 2 \\ 1\ 2 \end{Bmatrix} = \frac{1}{x^1}, \quad \begin{Bmatrix} 3 \\ 1\ 3 \end{Bmatrix} = \frac{1}{x^1},$$

(13) $$\begin{Bmatrix} 2 \\ 3\ 3 \end{Bmatrix} = -\sin x^2 \cos x^2, \quad \begin{Bmatrix} 3 \\ 2\ 3 \end{Bmatrix} = \operatorname{ctg} x^2.$$

3. Tensorul Ricci. a) Notăm

(1) $$p = \begin{Bmatrix} i \\ i\ j \end{Bmatrix}.$$

Atunci

(2) $$p_0 = \frac{A_0}{A} + \frac{V_0}{V}, \quad p_1 = \frac{A_1}{A} + \frac{V_1}{V} + \frac{2}{x^1},$$

(3) $$p_2 = \operatorname{ctg} x^2, \quad p_3 = 0.$$

Din simbolurile Riemann de a doua speță

$$R^i_{jkl} = -\frac{\partial \begin{Bmatrix} i \\ j\ k \end{Bmatrix}}{\partial x^l} + \frac{\partial \begin{Bmatrix} i \\ j\ l \end{Bmatrix}}{\partial x^k} + \begin{Bmatrix} i \\ s\ k \end{Bmatrix}\begin{Bmatrix} s \\ j\ l \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} i \\ s\ l \end{Bmatrix}\begin{Bmatrix} s \\ j\ k \end{Bmatrix}$$

obținem tensorul Ricci

(4) $$R_{jl} = R^i_{jil} = -\frac{\partial p_j}{\partial x^l} + \frac{\partial \begin{Bmatrix} i \\ j\ l \end{Bmatrix}}{\partial x^i} + p_s \begin{Bmatrix} s \\ j\ l \end{Bmatrix} - p_{jl},$$

notînd

(5) $$p_{jl} = \begin{Bmatrix} s \\ i\ j \end{Bmatrix}\begin{Bmatrix} i \\ s\ l \end{Bmatrix}.$$

b) Avem din (5),

$$p_{jj} = \begin{Bmatrix} s \\ i\ j \end{Bmatrix}\begin{Bmatrix} i \\ s\ j \end{Bmatrix};$$

sumarea este dublă și în raport cu s și în raport cu i; dar deoarece simbolurile cu trei indici distincți sînt nuli, avem numai posibilită-

țile : $s = i$, $s = j$, $i = j$; ultimele două dau același termen. Rezultă deci, sumînd în raport cu i,

(6) $$p_{jj} = \sum_{i=0}^{3} \left[\begin{Bmatrix} i \\ i\ j \end{Bmatrix}^2 + 2 \begin{Bmatrix} j \\ i\ j \end{Bmatrix}\begin{Bmatrix} i \\ j\ j \end{Bmatrix} \right].$$

De asemenea, în (5), s poate să ia valorile i, j sau l:

$$p_{jl} = \sum_i \begin{Bmatrix} i \\ i\ j \end{Bmatrix}\begin{Bmatrix} i \\ i\ l \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} i \\ i\ j \end{Bmatrix}\begin{Bmatrix} i \\ j\ l \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} l \\ i\ j \end{Bmatrix}\begin{Bmatrix} i \\ l\ l \end{Bmatrix};$$

în al doilea termen, din cauza simbolului $\begin{Bmatrix} i \\ j\ l \end{Bmatrix}$, i poate să ia numai valorile j sau l; în al treilea termen, din cauza factorului $\begin{Bmatrix} l \\ i\ j \end{Bmatrix}$, i poate să ia numai valorile j sau l. Atunci

$$p_{jl} = \sum_i \begin{Bmatrix} i \\ i\ j \end{Bmatrix}\begin{Bmatrix} i \\ i\ l \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} j \\ j\ j \end{Bmatrix}\begin{Bmatrix} j \\ j\ l \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} j \\ l\ j \end{Bmatrix}\begin{Bmatrix} l \\ j\ l \end{Bmatrix} +$$
$$+ \begin{Bmatrix} l \\ j\ j \end{Bmatrix}\begin{Bmatrix} j \\ l\ l \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} l \\ l\ i \end{Bmatrix}\begin{Bmatrix} l \\ l\ l \end{Bmatrix}.$$

Termenul al doilea și al cincilea sînt cuprinși în primul pentru $i = j$, respectiv $i = l$. Deci

(7) $$p_{jl} = \sum_i \begin{Bmatrix} i \\ i\ j \end{Bmatrix}\begin{Bmatrix} i \\ i\ l \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} j \\ l\ j \end{Bmatrix}\begin{Bmatrix} l \\ j\ l \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} l \\ j\ j \end{Bmatrix}\begin{Bmatrix} j \\ l\ l \end{Bmatrix}.$$

În ultimii doi termeni nu sumăm. Ținem seama și în formula (4) de valorile posibile ale indicelui de sumare, ca să nu avem toți indicii distincți. Deci

(8) $$R_{jl} = -\frac{\partial p_j}{\partial x^l} + \frac{\partial \begin{Bmatrix} j \\ j\ l \end{Bmatrix}}{\partial x^j} + \frac{\partial \begin{Bmatrix} l \\ j\ l \end{Bmatrix}}{\partial x^l} +$$
$$+ p_j \begin{Bmatrix} j \\ j\ l \end{Bmatrix} + p_l \begin{Bmatrix} l \\ j\ l \end{Bmatrix} - p_{jl}, \ j \neq l.$$

Revenind la (4), pentru $l = j$ avem

$$(9)\qquad R_{jj} = -\frac{\partial p_j}{\partial x^j} + \frac{\partial \binom{i}{j\ j}}{\partial x^i} + p_s \binom{s}{j\ j} - p_{jj},$$

fără sumare în raport cu j.

c) Pentru $j = 0$ avem

$$R_{00} = -\frac{\partial p_0}{\partial x^0} + \frac{\partial \binom{0}{0\ 0}}{\partial x^0} + \frac{\partial \binom{1}{0\ 0}}{\partial x^1} + p_0 \binom{0}{0\ 0} + p_1 \binom{1}{0\ 0} - p_{00};$$

calculăm în prealabil pe p_{00} din (6). Avem

$$p_{00} = \sum_i \binom{i}{i\ 0}^2 + 2 \sum_i \binom{0}{i\ 0} \binom{i}{0\ 0};$$

conform formulelor (9)–(13) din § 2, $i = 0$, 1 în primul termen și $i = 1$ în al doilea; atunci

$$p_{00} = \frac{V_0^2}{V^2} + \frac{A_0^2}{A^2} + 2\frac{V_1^2}{A^2}.$$

Rezultă din (9), ținînd seama de (2) și de (9) — (13) din § 2:

$$R_{00} = -\frac{\partial}{\partial x^0}\left(\frac{A_0}{A} + \frac{V_0}{V}\right) + \frac{\partial}{\partial x^0}\left(\frac{V_0}{V}\right) + \frac{\partial}{\partial x^1}\left(\frac{VV_1}{A^2}\right) +$$

$$+ \frac{V_0}{V}\left(\frac{A_0}{A} + \frac{V_0}{V}\right) + \frac{VV_1}{A^2}\left(\frac{A_1}{A} + \frac{V_1}{V} + \frac{2}{x^1}\right) - \frac{V_0^2}{V^2} - \frac{A_0^2}{A^2} - 2\frac{V_1^2}{A^2};$$

deci

$$(10)\qquad R_{00} = -\frac{A_{00}}{A} + \frac{VV_{11}}{A^2} + 2\frac{VV_1}{A^2 x^1} + \frac{A_0 V_0}{AV} - \frac{VA_1V_1}{A^3}.$$

În continuare

$$R_{11} = -\frac{\partial p_1}{\partial x^1} + \frac{\partial \binom{0}{1\ 1}}{\partial x^0} + \frac{\partial \binom{1}{1\ 1}}{\partial x^1} + p_0 \binom{0}{1\ 1} + p_1 \binom{1}{1\ 1} - p_{11};$$

calculăm în prealabil

$$p_{11} = \sum_i \binom{i}{i\ 1}^2 + 2 \sum_i \binom{1}{i\ 1} \binom{i}{1\ 1} =$$

$$= \binom{0}{0\ 1}^2 + \binom{1}{1\ 1}^2 + \binom{2}{2\ 1}^2 + \binom{3}{3\ 1}^2 + 2\binom{1}{0\ 1}\binom{0}{1\ 1},$$

$$p_{11} = \frac{A_1^2}{A^2} + \frac{V_1^2}{V^2} + \frac{2}{(x^1)^2} + 2\frac{A_0^2}{V^2}.$$

Atunci

$$R_{11} = -\frac{\partial}{\partial x^1}\left(\frac{A_1}{A} + \frac{V_1}{V} + \frac{2}{x^1}\right) + \frac{\partial}{\partial x^0}\left(\frac{AA_0}{V^2}\right) + \frac{\partial}{\partial x^1}\left(\frac{A_1}{A}\right) +$$

$$+ \frac{AA_0}{V^2}\left(\frac{A_0}{A} + \frac{V_0}{V}\right) + \frac{A_1}{A}\left(\frac{A_1}{A} + \frac{V_1}{V} + \frac{2}{x^1}\right) - \frac{A_1^2}{A^2} - \frac{V_1^2}{V^2} - \frac{2}{(x^1)^2} - 2\frac{A_0^2}{V^2},$$

deci

$$(11)\qquad R_{11} = -\frac{V_{11}}{V} + \frac{AA_{00}}{V^2} + 2\frac{A_1}{Ax^1} + \frac{A_1V_1}{AV} - \frac{AA_0V_0}{V^3}.$$

De asemenea

$$R_{22} = -\frac{\partial p_2}{\partial x^2} + \frac{\partial \binom{1}{2\ 2}}{\partial x^1} + p_1\binom{1}{2\ 2} - p_{22}.$$

Avem

$$p_{22} = \sum \binom{i}{i\ 2}^2 + 2\sum \binom{2}{i\ 2}\binom{i}{2\ 2} = \binom{3}{2\ 3}^2 + 2\binom{2}{1\ 2}\binom{1}{2\ 2},$$

$$p_{22} = \operatorname{ctg}^2 x^2 - \frac{2}{A^2}.$$

Atunci

$$R_{22} = -\frac{\partial}{\partial x^2}(\operatorname{ctg} x^2) - \frac{\partial}{\partial x^1}\left(\frac{x^1}{A^2}\right) -$$

$$- \frac{x^1}{A^2}\left(\frac{A_1}{A} + \frac{V_1}{V} + \frac{2}{x^1}\right) - \operatorname{ctg}^2 x^2 + \frac{2}{A^2},$$

deci

(12) $$R_{22} = 1 - \frac{1}{A^2} + \frac{A_1 x^1}{A^3} - \frac{V_1 x^1}{VA^2}.$$

În fine

$$R_{33} = \frac{\partial\binom{1}{3\;3}}{\partial x^1} + \frac{\partial\binom{2}{3\;3}}{\partial x^2} + p_1\binom{1}{3\;3} + p_2\binom{2}{3\;3} - p_{33}.$$

Avem

$$p_{33} = \Sigma\binom{i}{i\;3}^2 + 2\Sigma\binom{3}{i\;3}\binom{i}{3\;3} = 2\binom{3}{1\;3}\binom{1}{3\;3} + 2\binom{3}{2\;3}\binom{2}{3\;3},$$

deci

$$p_{33} = -\frac{2}{A^2}\sin^2 x^2 - 2\cos^2 x^2.$$

Atunci

$$R_{33} = -\frac{\partial}{\partial x^1}\left(\frac{x^1}{A^2}\sin^2 x^2\right) - \frac{\partial}{\partial x^2}(\sin x^2 \cos x^2) + $$
$$-\frac{x^1}{A^2}\sin^2 x^2\left(\frac{A_1}{A} + \frac{V_1}{V} + \frac{2}{x^1}\right) - \cos^2 x^2 + \frac{2}{A^2}\sin^2 x^2 + \cos^2 x^2,$$

deci

(13) $$R_{33} = R_{22}\sin^2 x^2.$$

d) Conform formulei (8) avem

$$R_{01} = -\frac{\partial p_0}{\partial x^1} + \frac{\partial\binom{0}{0\;1}}{\partial x^0} + \frac{\partial\binom{1}{0\;1}}{\partial x^1} + p_0\binom{0}{0\;1} + p_1\binom{1}{0\;1} - p_{01}.$$

Calculăm în prealabil pe p_{01} din (7); avem

$$p_{01} = \Sigma\binom{i}{i\;0}\binom{i}{i\;1} + \binom{0}{0\;1}\binom{1}{0\;1} + \binom{1}{0\;0}\binom{0}{1\;1}.$$

În primul termen, $i = 0$ sau $i = 1$. Rezultă

$$p_{01} = \frac{V_0 V_1}{V^2} + \frac{A_0 A_1}{A^2} + 2\frac{A_0 A_1}{AV}.$$

Atunci

$$R_{01} = -\frac{\partial}{\partial x^1}\left(\frac{A_0}{A} + \frac{V_0}{V}\right) + \frac{\partial}{\partial x^0}\left(\frac{V_1}{V}\right) + \frac{\partial}{\partial x^1}\left(\frac{A_0}{A}\right) +$$
$$+\frac{V_1}{V}\left(\frac{A_0}{A} + \frac{V_0}{V}\right) + \frac{A_0}{A}\left(\frac{A_1}{A} + \frac{V_1}{V} + \frac{2}{x^1}\right) - \frac{V_0 V_1}{V^2} - \frac{A_0 A_1}{A^2} - 2\frac{A_0 V_1}{AV}.$$

Deci

(14) $$R_{01} = \frac{2A_0}{Ax^1}.$$

De asemenea $R_{02} = -p_{02}$, deoarece p_0 nu depinde de x^2 şi $\binom{0}{0\;2} = 0$, $\binom{2}{0\;2} = 0$, iar $p_{02} = \Sigma\binom{i}{i\;0}\binom{i}{i\;2}$; restul termenilor fiind nuli. Dar şi termenii obţinuţi din sumare pentru $i = 0$, $i = 1$ sînt nuli. Deci

(15) $$R_{02} = 0.$$

Analog

(16) $$R_{03} = -p_{03} = 0.$$

În continuare

$$R_{12} = p_2\binom{2}{1\;2} - p_{12} = \frac{1}{x^1}\operatorname{ctg} x^2 - p_{12},$$

$$p_{12} = \Sigma\binom{i}{i\;1}\binom{i}{i\;2} = \frac{1}{x^1}\operatorname{ctg} x^2$$

pentru $i = 3$. Deci

(17) $$R_{12} = 0.$$

De asemenea

(18) $$R_{13} = -p_{13} = 0,$$

(19) $$R_{23} = -p_{23} = 0.$$

Deci *singurele componente nenule ale tensorului Ricci sînt*

$$R_{00},\ R_{11},\ R_{22},\ R_{33},\ R_{01}.$$

e) Avem pentru invariantul Ricci

$$R = g^{00}R_{00} + g^{11}R_{11} + g^{22}R_{22} + g^{33}R_{33} =$$

$$= -\frac{1}{V^2}\left(-\frac{A_{00}}{A} + \frac{VV_{11}}{A^2} + \frac{2VV_1}{A^2x^1} + \frac{A_0A_0}{AV} - \frac{VA_1V_1}{A^3}\right) +$$

$$+ \frac{1}{A^2}\left(-\frac{V_{11}}{V} + \frac{AA_{00}}{V^2} + 2\frac{A_1}{Ax^1} + \frac{A_1V_1}{AV} - \frac{AA_0V_0}{V^3}\right) +$$

$$+ \frac{2}{(x^1)^2}\left(1 - \frac{1}{A^2} + \frac{A_1x^1}{A^3} - \frac{V_1x^1}{VA^2}\right).$$

Deci

$$\frac{R}{2} = \frac{A_{00}}{AV^2} - \frac{V_{11}}{A^2V} + \frac{A_1V_1}{A^3V} - \frac{A_0V_0}{AV^3} + \tag{20}$$

$$+ \frac{1}{(x^1)^2} - \frac{1}{A^2(x^1)^2} + \frac{2A_i}{A^3x^1} - \frac{2V_1}{VA^2x^1}.$$

4. Metrică relativistă. a) Pentru ca o metrică cu simetrie sferică generală să fie relativistă trebuie să fie satisfăcute ecuațiile Einstein

$$R_{ij} - \frac{R}{2}g_{ij} = -\varkappa T_{ij}, \tag{1}$$

deci

$$R_{00} + \frac{R}{2}V^2 = -\varkappa T_{00}, \tag{2}$$

$$R_{11} - \frac{R}{2}A^2 = -\varkappa T_{11}, \tag{3}$$

$$R_{22} - \frac{R}{2}(x^1)^2 = -\varkappa T_{22}, \tag{4}$$

$$R_{33} - \frac{R}{2}(x^1)^2\sin^2 x^2 = -\varkappa T_{33}, \tag{5}$$

$$R_{01} = -\varkappa T_{01}. \tag{6}$$

Rezultă că toate componentele T_{ij} $(i \neq j)$ sînt nule, afară eventual de T_{01}.

Deoarece $R_{33} = R_{22}\sin^2 x^2$, avem din (5) și

$$T_{33} = T_{22}\sin^2 x^2. \tag{7}$$

Deci pentru ca un tensor energie impuls să fie compatibil cu o metrică cu simetrie sferică generală, trebuie ca toate componentele $T_{ij}(i \neq j)$ să fie nule, afară eventual de T_{01} și să verifice relația (7).

b) Avem

$$R_{00} + \frac{R}{2}V^2 = -\frac{A_{00}}{A} + \frac{VV_{11}}{A^2} + \frac{2VV_1}{A^2x^1} + \frac{A_0V_0}{AV} - \frac{VA_1V_1}{A^3} +$$

$$+ V^2\left(\frac{A_{00}}{AV^2} - \frac{V_{11}}{A^2V} + \frac{A_1V_1}{A^3V} - \frac{A_0V_0}{AV^3} + \frac{1}{(x^1)^2} - \frac{1}{A^2(x^1)^2} +\right.$$

$$\left.+ \frac{2A_1}{A^3x^1} - \frac{2V_1}{VA^2x^1}\right),$$

$$R_{00} + \frac{R}{2}V^2 - \frac{V^2}{(x^1)^2} = \frac{V^2}{A^2(x^1)^2} + \frac{2A_1V^2}{A^3x^1}. \tag{8}$$

$$R_{11} - \frac{R}{2}A^2 = -\frac{V_{11}}{V} + \frac{AA_{00}}{V^2} + 2\frac{A_1}{Ax^1} + \frac{A_1V_1}{AV} - \frac{AA_0V_0}{V^3} -$$

$$- A^2\left(\frac{A_{00}}{AV^2} - \frac{V_{11}}{A^2V} + \frac{A_1V_1}{A^3V} - \frac{A_0V_0}{AV^3} + \frac{1}{(x^1)^2} - \frac{1}{A^2(x^1)^2} +\right.$$

$$\left.+ \frac{2A_1}{A^3x^1} - \frac{2V_1}{VA^2x^1}\right),$$

$$R_{11} - \frac{R}{2}A^2 = \frac{1}{(x^1)^2} - \frac{A^2}{(x^1)^2} + \frac{2V_1}{Vx^1}, \tag{9}$$

$$R_{22} - \frac{R}{2}(x^1)^2 = 1 - \frac{1}{A^2} + \frac{A_1x^1}{A^3} - \frac{V_1x^1}{VA^2} -$$

$$- (x^1)^2\left(\frac{A_{00}}{AV^2} - \frac{V_{11}}{A^2V} + \frac{A_1V_1}{A^3V} - \frac{A_0V_0}{AV^3} + \frac{1}{(x^1)^2} - \frac{1}{A^2(x^1)^2} +\right.$$

$$\left.+ \frac{2A_1}{A^3x^1} - \frac{2V_1}{VA^2x^1}\right).$$

$$(10)\qquad R_{22} - \frac{R}{2}(x^1)^2 = \frac{V_{11}(x^1)^2}{A^2V} - \frac{A_{00}(x^1)^2}{AV^2} + \frac{V_1x^1}{A^2V} - \frac{A_1x^1}{A^3} + \frac{A_0V_0(x^1)^2}{AV^3} - \frac{A_1V_1(x^1)^2}{A^3V}.$$

c) Ecuațiile Einstein devin

$$(11)\qquad 2\frac{A_1}{A} + \frac{A^2-1}{x^1} = -\varkappa\frac{A^2x^1}{V^2}T_{00},$$

$$(12)\qquad 2\frac{V_1}{V} + \frac{1-A^2}{x^1} = -\varkappa\, x^1T_{11},$$

$$(13)\qquad \frac{V_{11}}{A^2V} - \frac{A_{00}}{AV^2} - \frac{A_1V_1}{A^3V} + \frac{1}{x^1A^2}\left(\frac{V_1}{V} - \frac{A_1}{A}\right) + \frac{A_0V_0}{AV^3} = -\varkappa\frac{T_{22}}{(x^1)^2},$$

$$(14)\qquad 2A_0 = -\varkappa A x^2 T_{01}.$$

Presupunînd cunoscut tensorul energie impuls, determinarea unei metrici cu simetrie sferică generală depinde de integrarea sistemului (11–14) de patru ecuații cu derivate parțiale cu două necunoscute A, V, în două variabile x^0, x^1. Integrăm acest sistem pentru o anumită formă a tensorului T_{ij}.

d) Presupunem

$$(15)\qquad T_{00} = 0,\quad T_{01} = 0,$$

Din (14) rezultă $A_0 = 0$, deci A este funcție numai de x^1. Ecuația (11) devine o ecuație cu variabile separate

$$(16)\qquad \frac{\mathrm{d}A}{A(A^2-1)} + \frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}x^1}{x^1} = 0.$$

Avem

$$\frac{1}{A(A^2-1)} = -\frac{1}{A} + \frac{1}{2(A+1)} + \frac{1}{2(A-1)};$$

rezultă

$$\frac{(A^2-1)x^1}{A^2} = a,$$

a fiind o constantă de integrare; avem deci integrala

$$(17)\qquad A^2 = \frac{1}{1 - \dfrac{a}{x^1}}.$$

Din ecuația (13) determinăm pe V. În particular, dacă și

$$(18)\qquad T_{11} = 0,$$

ecuația (13) devine

$$(19)\qquad 2\frac{V_1}{V} = -\frac{a}{(x^1)^2}\frac{1}{1-\dfrac{a}{x^1}} = \frac{\left(1-\dfrac{a}{x^1}\right)'}{1-\dfrac{a}{x^1}},$$

deci

$$V^2 = \varphi(x^0)\left(1 - \frac{a}{x^1}\right),$$

φ fiind funcție numai de x^0. Deoarece φ intervine numai în coeficientul lui $(\mathrm{d}x^0)^2$, printr-o schimbare de variabilă îl reducem la o constantă. Putem să punem deci

$$(20)\qquad V^2 = 1 - \frac{a}{x^1}$$

și regăsim metrica Schwarzschild (I.D.3).

$$(21)\qquad \mathrm{d}s^2 = -\left(1 - \frac{a}{x^1}\right)(\mathrm{d}x^0)^2 + \frac{(\mathrm{d}x^1)^2}{1-\dfrac{a}{x^1}} + (x^1)^2[(\mathrm{d}x^2)^2 + \sin^2x^2\,(\mathrm{d}x^3)^2].$$

Din (19) avem

$$(22)\qquad \frac{V_1}{V} + \frac{A_1}{A} = 0,$$

$$\left(\frac{V_1}{V}\right)_1 = \frac{V_{11}}{V} - \frac{V_1^2}{V^2},\quad \frac{V_{11}}{V} = \left(\frac{A_1}{A}\right)^2 - \left(\frac{A_1}{A}\right)_1.$$

Din (16)

$$\frac{A_1}{A} = \frac{1-A^2}{2x^1},\quad \left(\frac{A_1}{A}\right)_1 = \frac{1-A^2}{2(x')^2} - \frac{1}{x^1}A^2\frac{A_1}{A} = \frac{A^4-1}{2(x^1)^2}.$$

Ecuaţia rămasă (13) devine

$$\frac{1}{A^2}\left[2\left(\frac{A_1}{A}\right)^2-\left(\frac{A_1}{A}\right)_1-\frac{2}{x^1}\frac{A_1}{A}\right]=0=-\varkappa\frac{T_{22}}{(x^1)^2},$$

deci şi $T_{22}=0$.

Deci *dacă pentru un spaţiu cu simetrie sferică generală presupunem că* $T_{00}=0$, $T_{01}=0$, $T_{11}=0$, *atunci toate componentele tensorului energie impuls sînt nule şi obţinem o metrică Schwarzschild.*

Din ecuaţiile Einstein inversate [I.C.2, (8)]

$$R_{ij}=-\varkappa\left(T_{ij}-\frac{1}{2}Tg_{ij}\right)$$

rezultă că *pentru un spaţiu Schwarzschild simbolurile Ricci sînt toate nule.* Rezultă că şi invariantul Ricci R este nul.

5. Spaţii Einstein. a) Spunem că un spaţiu riemannian este *spaţiu Einstein,* dacă tensorul energie este proporţional cu tensorul fundamental. Conform ecuaţiilor Einstein

$$(1)\qquad R_{ij}=-\frac{1}{2}Rg_{ij}=-\varkappa T_{ij}$$

trebuie să avem

$$(2)\qquad R_{ij}=\lambda g_{ij}.$$

Condiţiile (2) sînt ecuaţii cu derivate parţiale, greu de integrat, pentru componentele tensorului fundamental g_{ij}.

b) Ne propunem să determinăm spaţiile Einstein cu simetrie sferică generală, deci de forma

$$(3)\qquad ds^2=-V^2(dx^0)^2+A^2(dx^1)^2+(x^1)^2\,[(dx^2)^2+\sin^2x^2\,(dx^3)^2].$$

Din forma metricii (3), toţi coeficienţii g_{ij} cu $i\neq j$ sînt nuli. Conform cu (2), *toate componentele* $R_{ij}(i\neq j)$ *ale tensorului Ricci sînt nule.*

De fapt, pentru metrica (3) ştim că toate simbolurile Ricci R_{ij} $(i\neq j)$, afară eventual de R_{01} sînt nule. Pentru un spaţiu Einstein, trebuie să se anuleze şi acesta. Avem deci $R_{01}\neq 0$. Rezultă din (4.13)

$$R_{01}=\frac{2A_0}{Ax^1}=0$$

deci A nu depinde de x^0. Avem deci în (3),

$$A=A(x^1),\quad V=V(x^0,x^1).$$

Ecuaţiile (2), cu formulele (9)—(12) din §4 devin

$$(4)\qquad \frac{V_{11}}{A^2}+\frac{2V_1}{A^2x^1}-\frac{A_1V_1}{A^3}=-\lambda V,$$

$$(5)\qquad -\frac{V_{11}}{V}+\frac{2A_1}{Ax^1}+\frac{A_1V_1}{AV}=\lambda A^2,$$

$$(6)\qquad 1-\frac{1}{A^2}+\frac{A_1x^1}{A^3}-\frac{V_1x^1}{VA^2}=\lambda(x^1)^2.$$

Deoarece

$$g_{33}=g_{22}\,\sin^2x^2,\qquad R_{33}=R_{22}\sin^2x^2,$$

relaţia (2) pentru $i=j=3$ revine la (6). Avem deci trei ecuaţii pentru funcţiile A, V şi λ.

c) Eliminînd pe λ între ecuaţiile (4)—(6), obţinem relaţiile

$$(7)\qquad \frac{A_1}{A}+\frac{V_1}{V}=0,$$

$$(8)\qquad \left(\frac{A_1}{A}\frac{V_1}{V}-\frac{V_{11}}{V}\right)(x^1)^2+\left(\frac{A_1}{A}+\frac{V_1}{V}\right)x^2+1-A^2=0.$$

Din (7) deducem

$$(9)\qquad V=\frac{c}{A},$$

unde $c=c(x^0)$. Eliminînd pe V din (8), obţinem

$$(10)\qquad \left(\frac{A_1}{A}\right)_1-2\left(\frac{A_1}{A}\right)^2+\frac{1-A^2}{(x^1)^2}=0.$$

Substituim

$$(11)\qquad A^2=\frac{1}{X},$$

13 – c. 1767

deci

$$(12)\qquad \frac{A_1}{A} = -\frac{1}{2}\frac{X_1}{X}$$

şi ecuaţia (10) devine

$$(13)\qquad X_{11} = 2\frac{X-1}{(x^1)^2}.$$

O nouă substituţie

$$(14)\qquad X = 1 + \frac{Y}{x^1}$$

transformă ecuaţia (13) în

$$(15)\qquad \frac{Y_{11}}{Y_1} = \frac{2}{x^1},$$

de unde

$$Y_1 = 3\gamma(x^1)^2, \quad Y = \gamma(x^1)^3 + \alpha,$$

α şi γ fiind constante de integrare. Atunci

$$(16)\qquad A^2 = \frac{1}{1 + \frac{\alpha}{x^1} + \gamma(x^1)^2}, \quad V^2 = 1 + \frac{\alpha}{x^1} + \gamma(x^1)^2$$

deoarece printr-o schimbare de variabile reducem pe c la o constantă.

Deci *spaţiul Einstein cu simetrie sferică* (3) *are coeficienţii daţi de* (16).

Pentru $\gamma = 0$ obţinem metrica Schwarzschild.

d) Din (11) obţinem

$$(17)\qquad \frac{A_1}{A_3} = -\frac{\alpha}{(2x^1)^2} + \gamma x^1.$$

Întorcîndu-ne la (6) şi ţinînd seama de (7), avem

$$(18)\qquad 1 - \frac{1}{A^2} + 2\frac{A_1}{A^3}x^1 = \lambda(x^1)^2$$

şi cu valorile (16) şi (17) avem

$$(19)\qquad \lambda = -3\gamma.$$

Din (27) din §2 avem pentru invariantul Ricci

$$\frac{R}{2} = -\frac{V_{11}}{A^2 V} + \frac{A_1 V_1}{A^3 V} + \frac{1}{(x^1)^2} - \frac{1}{A^2(x^1)^2} + 2\frac{A_1}{A^3 x^1} - 2\frac{V_1}{V A^2 x^1}.$$

Eliminăm funcţia V prin

$$\frac{V_1}{V} = -\frac{A_1}{A}, \quad \frac{V_{11}}{V} = \left(\frac{A_1}{A}\right)^2 - \left(\frac{A_1}{A}\right)_1$$

şi ţinînd seama de (10),

$$\frac{V_{11}}{V} = \frac{1-A^2}{(x^1)^2} - \left(\frac{A_1}{A}\right)^2.$$

Obţinem

$$\frac{R}{4} = \frac{1}{(x^1)^2}\left[1 - \frac{1}{A^2} + 2\frac{A_1}{A^3}x^1\right]$$

şi ţinînd seama de (18) şi (19) avem

$$(20)\qquad R = -12\,\gamma.$$

Din ecuaţiile Einstein

$$-\varkappa T_{ij} = R_{ij} - \frac{1}{2}R\,g_{ij},$$

ţinînd seama de (2), (9) şi (20), avem

$$(21)\qquad -\varkappa T_{ij} = 3\gamma g_{ij},$$

adică

$$(22)\qquad -\frac{T_{00}}{\frac{c^2}{A^2}} = \frac{T_{11}}{A^2} = \frac{T_{22}}{(x^1)^2}, \quad T_{33} = T_{22}\sin^2 x^2.$$

6. Soluţii regulate. a) O metrică cu simetrie sferică generală

$$(1)\qquad ds^2 = -V^2(dx^0)^2 + A^2(dx^1)^2 + (x^1)^2[(dx^2)^2 + \sin^2 x^2 (dx^3)^2],$$

unde V şi A sînt funcţii de x^0, x^2, este *regulată*, dacă pentru $x^1 \to \infty$ se reduce la metrica Minkowski, deci

(2) $$\lim_{x^1\to\infty} V = 1, \quad \lim_{x^1\to\infty} A = 1,$$

Metrica Schwarzschild cu $V^2 = 1 - \frac{a}{x^1}$, $A = \frac{1}{V}$ este regulată; dar metrica spaţiului Einstein, cu $V^2 = 1 + \frac{\alpha}{x^1} + \gamma(x^1)^2$, $A = \frac{1}{V}$ nu este regulată.

Notăm pentru uşurinţă, $x^1 = r$.

b) Presupunem că funcţiile V şi A sînt regulate în exteriorul unui cerc de rază $R < r$, deci putem să le dezvoltăm în serii

(3) $$V^2 = 1 + \frac{a_1}{r} + \ldots + \frac{a_n}{r^n} + \ldots$$

(4) $$A^2 = 1 + \frac{b_1}{r} + \ldots + \frac{b_n}{r^n} + \ldots$$

a_i, b_i fiind funcţii de x^0.

Considerăm ecuaţiile Einstein (4.c)

$$2\frac{A_0}{A} + \frac{A^2-1}{x^1} = -\varkappa\frac{A^2 x^1}{V^2} T_{00}, \quad 2\frac{V_1}{V} + \frac{1-A^2}{x^1} = -\varkappa x^1 T_{11}$$

pe care le scriem sub forma

(5) $$(A^2)_1 + \frac{A^2(A^2-1)}{r} = -\frac{A^4 \varkappa r}{V^2} T_{00},$$

(6) $$(V^2)_1 - \frac{V^2(A^2-1)}{r} = -\varkappa r V^2 T_{11}.$$

c) Înlocuim dezvoltările (3), (4) în prima parte din (5). Avem

$$-\frac{b_1}{r^2} - \frac{2b_2}{r^3} - \ldots - \frac{nb_n}{r^{n+1}} - \ldots$$

$$\ldots + \frac{1}{r^2}\left(1 + \frac{b_1}{r} + \cdots\right)\left(b_1 + \frac{b_2}{r} + \ldots + \frac{b_n}{r^{n-1}}\right),$$

deci o expresie cel puţin de ordinul al treilea în $\frac{1}{r}$. Pentru $n = 2p$, coeficientul lui $\left(\frac{1}{r}\right)^{n+1}$ este

$$-n\, b_n + b_n + b_1 b_{n-1} + b_2 b_{n-2} + \ldots + b_p^2,$$

(7) $$b_n(1-n) + \sum_1^{p-1} b_s b_{n-s} + b_p^2 \cdot$$

Pentru $n = 2p$, coeficientul lui b_p^2 lipseşte. Deoarece prima parte din (5) este de ordinul al treilea, iar $\frac{A^4}{V^2}$ de ordinul zero, atunci rT_{00} trebuie să fie de ordinul al treilea, deci T_{00} de ordinul al patrulea:

(8) $$T_{00} = \frac{m_4}{r^4} + \frac{m_5}{r^5} + \ldots$$

Atunci ecuaţia (5) pentru $n = 2$ ne conduce prin identificarea puterilor în $\left(\frac{1}{r}\right)^3$ la

(9) $$b_2 - b_1^2 = \varkappa m_4.$$

Să scriem partea a doua a relaţiei (5); avem

$$\frac{1}{V^2} = 1 - \frac{a_1}{r} + \ldots$$

$$\frac{A^4}{V^2} = \left(1 + \frac{b_1}{r} + \ldots\right)^2\left(1 - \frac{a_1}{r} + \cdots\right) =$$

$$= \left(1 + 2\frac{b_1}{r} + \ldots\right)\left(1 - \frac{a_1}{r} + \ldots\right) = 1 + \frac{2b_1 - a_1}{r} + \cdots,$$

$$-\frac{A^4}{V^2} r\, T_{00} = -\left(1 + \frac{2b_1 - a_1}{r} + \ldots\right)\left(\frac{m_4}{r^3} + \frac{m_5}{r^4} + \ldots\right).$$

Avem deci, pentru $n = 3$, identificînd coeficientul în $\left(\frac{1}{r}\right)^4$,

(10) $$2b_3 - 2b_1 b_2 = \varkappa[m_5 + (2b_1 - a_1)\, m_4].$$

Relațiile (9), (10) și următoarele, pentru $n = 4, \ldots$, ne dau din aproape în aproape coeficienții $b_2, b_3, \ldots$ în funcție de $a_1, a_2, \ldots, b_1$ și $m_4, m_5, \ldots$

d) În (6) avem

$$\frac{a_1}{r^2} + \frac{2a_2}{r^3} + \ldots + \frac{1}{r^2}\left(1 + \frac{a_1}{r} + \ldots\right)\left(b_1 + \frac{b_2}{r} + \ldots\right) =$$

$$= \varkappa r\left(1 + \frac{a_1}{r} + \ldots\right) T_{11}.$$

Prima parte fiind de ordinul al doilea, rT_{11} trebuie să fie de același ordin, deci T_{11} de ordinul al treilea:

(11) $$T_{11} = \frac{n_3}{r^3} + \frac{n_4}{r^4} + \ldots$$

Avem atunci, prin identificare

(12) $$a_1 + b_1 = \varkappa n_3,$$

(13) $$2a_2 + b_2 + a_1 b_1 = \varkappa(n_4 + a_1 n_3)$$

etc. și din sistemele (9)–(13), ... determinăm succesiv pe $a_1, a_2, \ldots$ $\ldots, a_n, \ldots, b_2, \ldots, b_n, \ldots$ dacă sînt dați b_1, m_i, n_i.

Deci *ecuațiile Einstein posedă o soluție regulată de forma* (1), (3), (4) *dacă* T_{00} *și* T_{11} *sînt date de* (8) *și* (11) *și în aceste soluții* b_1 *este o constantă arbitrară.*

e) Ca să demonstrăm convergența seriilor, folosim metoda funcțiilor majorante. Pentru $r > R$, $\frac{1}{r} < \frac{1}{R}$, deci

$$1 + \frac{a_1}{r} + \ldots + \frac{a_n}{r^n} + \ldots < 1 + \frac{a_1}{R} + \ldots + \frac{a_n}{R^n} + \ldots <$$

$$< M\left(1 + \frac{1}{R} + \ldots + \frac{1}{R^n} + \ldots\right) = \frac{MR}{R - 1},$$

M fiind marginea superioară a numerelor 1, a_i.

Evident, același rezultat este valabil pentru A^2.

f) Relativ la componenta T_{01} avem (4.c)

$$\frac{A_0}{A} = -\varkappa r T_{01}$$

dar

$$\frac{A_0}{A} = \frac{(A^2)_0}{2A^2} = \frac{1}{2}\left(\frac{b_1'}{r} + \ldots\right)\left(1 - \frac{b_1}{r} + \ldots\right) = \frac{b_1'}{2r} + \ldots$$

notînd prin accente derivările în raport cu x_0. Deci T_{01} este de ordinul al doilea

(14) $$T_{01} = \frac{p_2}{r^2} + \ldots$$

Relativ la componenta T_{23} avem

$$\frac{V_{11}}{A^2 V} - \frac{A_{00}}{A V^2} - \frac{A_1 V_1}{A^3 V} + \frac{A_0 V_0}{A V^3} + \frac{1}{x^1 A^2}\left(\frac{V_1}{V} - \frac{A_1}{A}\right) = -\varkappa \frac{T_{22}}{(x^1)^2}$$

sau

$$\frac{1}{A^2}\left(\frac{V_1}{V}\right)_1 - \frac{1}{V^2}\left(\frac{A_0}{A}\right)_0 + \frac{1}{A^2}\left(\frac{1}{r} + \frac{V_1}{V}\right)\left(\frac{V_1}{V} - \frac{A_1}{A}\right) +$$

$$+ \frac{1}{V^2}\frac{A_0}{A}\left(\frac{V_0}{V} - \frac{A_0}{A}\right) = -\varkappa \frac{T_{22}}{r^2};$$

dar

$$\frac{V_1}{V} = \frac{(V^2)_1}{2V^2} = \frac{1}{2}\left(-\frac{a_1}{r} + \ldots\right)\left(1 - \frac{a_1}{r} + \ldots\right) = -\frac{a_1}{2r^2} + \ldots$$

$$\frac{A_1}{A} = -\frac{b_1}{2r^2} + \ldots$$

deci

$$(1 + \ldots)\left(\frac{a_1}{r^3} + \ldots\right) - (1 + \ldots)\left(\frac{b_1'}{2r} + \ldots\right) +$$

$$+ (1 + \ldots)\left(\frac{1}{r} + \ldots\right)\left(\frac{b_1 - a_1}{2r^2} + \ldots\right) +$$

$$+ (1 + \ldots)\left(\frac{b_1'}{2r} + \ldots\right)\left(\frac{b_1' - a_1'}{2r} + \ldots\right) = -\frac{\varkappa}{r^2} T_{22}.$$

Prima parte fiind cel puțin de ordinul al treilea, T_{22} trebuie să fie de primul ordin :

(15) $$T_{22} = \frac{q_1}{r} + \ldots$$

Deci *tensorul energie impuls este nul la infinit*, ceea ce corespunde ipotezei că materia este concentrată în origine.

7. Indicații bibliografice. Relativ la spațiile cu simetrie sferică să se consulte lucrările :

Vrănceanu, G. Teleman, C. *Geometrie euclidiană, geometrii neeuclidiane, teoria relativității*. București, Editura tehnică, 1965.

Vrănceanu, G. *Sur les métriques relativistes à symétrie sphérique*. Bulletin Math. de la Soc. Math. Roumaine, 10, (58). 1966, p. 59–62.

Singe, J. *Relativity, the general theory*. Amsterdam, 1960.

Petrov, A. *Prostranstva Einsteina*. Moscova, 1961.

Mihăileanu, N. *Sur les espace d'Einstein centrales symétriques*. Analele Univ. București, 19, 2, 1970, p. 101–103.

C. FORME CANONICE ALE ECUAȚIILOR GRAVITAȚIONALE

1. Ecuațiile Einstein într-un sistem de congruențe. a) Considerăm metrica relativității restrînse

($$ds^2 = -(dx^0)^2 + (dx^1)^2 + (dx^2)^2 + (dx^3)^2$$

în coordonatele $x^0 = ct$, $x^1 = x$, $x^2 = y$, $x^3 = z$.

Obținem o generalizare pentru metrica

(2) $$ds^2 = -(ds^0)^2 + (ds^1)^2 + (ds^2)^2 + (ds^3)^2,$$

unde ds^a sînt forme diferențiale

(3) $$ds^a = \lambda_0^a\, dx^0 + \lambda_1^a dx^1 + \lambda_2^a\, dx^2 + \lambda_3^a\, dx^3.$$

Sîntem astfel într-un spațiu riemannian de signatură

$$- \quad + \quad + \quad +$$

Metrica (2) este scrisă într-un sistem de congruențe. Coeficienți metricii (2) sînt dați în coordonate, de

(4) $$g_{ij} = -\lambda_i^0\lambda_j^0 + \lambda_i^1\lambda_j^1 + \lambda_i^2\lambda_j^2 + \lambda_i^3\,\lambda_j^3.$$

O transformare de congruențe care păstrează forma (2) este dată de formulele de tip Lorentz

$$ds'^0 = \nu\left(ds^0 + \frac{v}{c}\, ds^1\right), \quad ds'^1 = \nu\left(ds^1 + \frac{v}{c}\, ds^0\right).$$

$$ds'^2 = ds^2, \quad ds'^3 = ds^3, \quad \frac{1}{\nu} = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}.$$

Mai general, scriind metrica sub forma (2), congruențele pseudo-ortogonale ds^a determină în fiecare punct al varietății riemanniene un reper de tipul relativității restrînse. Stabilim astfel o legătură mai profundă între teoria generală și cea restrînsă a relativității.

b) După Einstein, între coeficienții g_{ij} ai metricii și tensorul energie impuls T_{ij} avem relațiile

(5) $$R_{ij} - \frac{1}{2} R\, g_{ij} = -\varkappa\, T_{ij},$$

$\varkappa$ fiind o constantă iar R_{ij} și R, tensorul și invariantul Ricci ai metricii (1). Într-un sistem de congruențe, ecuațiile Einstein (5) devin

(6) $$r_{ab} - \frac{1}{2} r\, \alpha_{ab} = -\varkappa\, t_{ab},$$

α_{ab} fiind coeficienții metricii în sistemul de congruențe

$$ds^2 = \alpha_{ab}\, ds^a\, ds^b.$$

t_{ab}, r_{ab} fiind proiecțiile tensorilor T_{ij}, R_{ij} în sistemul de congruențe și r invariantul Ricci. Mai precis, μ_a^i fiind minorii normați ai elementelor λ_i^a în determinantul $|\lambda_i^a| \neq 0$,

$$r_{ab} = \mu_a^i\mu_b^j R_{ij}, \quad t_{ab} = \mu_a^i\mu_b^j T_{ij}$$

iar $R = R_{ij}g^{ij}$ devine în congruențe

$$r = r_{ab}\,\alpha^{ab} = r_{aa}\alpha^{aa},$$

adică

(7) $$r = -r_{00} + r_{11} + r_{22} + r_{33}.$$

Detaliat, ecuaţiile Einstein (6) sînt

$$(8)\qquad r_{00}+\frac{r}{2}=-\varkappa t_{00},\quad r_{0a}=-\varkappa t_{0a},$$

$$(9)\qquad r_{aa}-\frac{r}{2}=-\varkappa t_{aa},\quad r_{ab}=-\varkappa t_{ab}$$

$(a, b = 1, 2, 3)$.

Scriind ecuaţiile Einstein sub formă inversată

$$(10)\qquad R_{ij}=\varkappa\left(T_{ij}-\frac{1}{2}g_{ij}\right),\quad R=\varkappa T,$$

avem şi în congruenţe

$$(11)\qquad r_{ij}=-\varkappa\left(t_{ij}-\frac{1}{2}t\alpha_{ij}\right),\quad r=\varkappa t.$$

c) Forma (2) este păstrată de transformările pseudoortogonale

$$d\bar{s}^a=c_b^a\, ds^b,$$

în special de transformările Lorentz :

$$(12)\qquad d\bar{s}^0=ds^0\operatorname{ch}\theta+ds^1\operatorname{sh}\theta,\quad d\bar{s}^1=ds\operatorname{sh}\theta+$$
$$+ds^1\operatorname{ch}\theta,\quad d\bar{s}^1=ds^2, d\bar{s}^3=ds^3$$

şi inversele lor, schimbînd semnul parametrului θ,

$$(13)\qquad ds^0=d\bar{s}^0\operatorname{ch}\theta-d\bar{s}^1\operatorname{sh}\theta,\quad ds^1=-d\bar{s}^0\operatorname{sh}\theta+$$
$$+d\bar{s}^1\operatorname{ch}\theta,\quad ds^2=d\bar{s}^2,\quad ds^3=d\bar{s}^3$$

2. Reducerea tensorului energie. a) Ne propunem să determinăm transformarea pentru care ecuaţiile Einstein au o formă cît mai simplă.

În general, fie să reducem simultan la forme canonice, două forme pătratice

$$\varphi=a_{ij}\,x^i\,x^j,\quad \psi=b_{ij}x^ix^j.$$

Dacă una din forme este definită pozitiv, după o teoremă din algebră (care de fapt este traducerea în calcul a problemei de geometrie a raportării unei cuadrice nedegenerate, cu centru, la sistemul ei de axe de simetrie), putem să aducem formele φ şi ψ la formele canonice

$$\varphi=(x^1)^2+(x^2)^2+\ldots+(x^n)^2,$$

$$\psi=\rho_1(x^1)^2+\rho_2(x^2)^2+\ldots+\rho_n(x^n)^2,$$

unde ρ_i sînt totdeauna reale, rădăcinile ecuaţiei caracteristice $|a_{ij}-\rho b_{ij}|=0$. Nu putem să aplicăm aici acest rezultat, formele nefiind definite pozitiv. Astfel, notînd pentru comoditate

$$(1)\qquad y^a=ds^a$$

forma $\varphi=-ds^2$, după metrica relativităţii restrînse, admite forma canonică

$$(2)\qquad \varphi=(y^0)^2-(y^1)^2-(y^2)^2-(y^3)^2.$$

Trebuie să efectuăm transformări care să păstreze pe (2), deci transformări pseudoortogonale, care să reducă şi tensorul Ricci sau tensorul energie la o formă cît mai simplă, adică cu cît mai puţini coeficienţi. Aceşti tensori fiind legaţi prin relaţiile Einstein, este suficient să reducem la formă canonică pe unul din ei, de exemplu tensorul energie, deci forma

$$(3)\qquad \psi=t_{ab}\,y^ay^b\quad (a,\ b=0,\ 1,\ 2,\ 3).$$

b) Printr-o transformare ortogonală în y^1, y^2, y^3 şi lăsînd pe y^0 neschimbat, deci forma (2) invariantă, putem să reducem grupul omogen cu indicii 1, 2, 3 ai formei ψ la forma canonică

$$k_1(y^1)^2+k_2(y^2)^2+k_3(y^3)^2,$$

deci putem să o scriem pe ψ sub forma

$$(4)\qquad \psi=k_0(y^0)^2+k_1(y^1)^2+k_2(y^2)^2+k_3(y^3)^2+$$
$$+2a_1y^0y^1+2a_2y^0y^2+2a_3y^0y^3.$$

Putem să reducem mai departe forma, anulînd pe a_2, a_3. Aceasta revine la alegerea originii pe axa y^1 a cuadricei (4) în spaţiul neeuclidian (2), raportat la coordonatele omogene y^α. În adevăr, coordonatele centrului cuadricei sînt date de sistemul

$$\frac{1}{2}\frac{\partial\psi}{\partial y^1} = k_1 y^1 + a_1 y^0 = 0,$$

$$\frac{1}{2}\frac{\partial\psi}{\partial y^2} = k_2 y^2 + a_2 y^0 = 0, \quad \frac{1}{2}\frac{\partial\psi}{\partial y^3} = k_3 y^3 + a_3 y^0 = 0$$

satisfăcut de valorile $(y^1, 0, 0)$ dacă $a_2 = a_3 = 0$. Avem deci

(5) $$\psi = k_0(y^0)^2 + k_1(y^1)^2 + k_2(y^2)^2 + k_3(y^3)^2 + 2a_1 y^0 y^1,$$

adică

(6) $$t_{12} = t_{23} = t_{31} = 0, \quad t_{02} = t_{03} = 0.$$

c) Considerăm ecuaţia în ρ:

$$|\psi - \rho\varphi| = 0;$$

această ecuaţie este

$$\begin{vmatrix} k_0 - \rho & a_1 & 0 & 0 \\ a_1 & k_1 + \rho & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k_2 + \rho_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & k_3 + \rho \end{vmatrix} = 0,$$

deci

$$(\rho + k_2)(\rho + k_3)\,[(k_0 - \rho)(k_1 + \rho) - a_1^2] = 0,$$

cu rădăcinile

(7) $$\rho_2 = -k_2, \quad \rho_3 = -k_3,$$

(8) $$\rho^2 + (k_1 - k_0)\rho + a_1^2 - k_0 k_1 = 0.$$

Ultima ecuaţie are şi ea rădăcini reale, dacă

(9) $$d = (k_0 + k_1)^2 - 4\,a_1^2 \geq 0.$$

d) Ne propunem să anulăm şi coeficientul a_1 printr-o transformare pseudoortogonală, mai precis să determinăm parametrul θ în (13) din §1, adică

(10) $$y^0 = \bar{y}^0 \operatorname{ch}\theta - \bar{y}^1 \operatorname{sh}\theta, \quad y^1 = -\bar{y}^0 \operatorname{sh}\theta + \bar{y}^1 \operatorname{ch}\theta.$$

Avem din (5), lăsînd de o parte termenii invarianţi în y^2, y^3

(11) $$k_0(\bar{y}^0\operatorname{ch}\theta - \bar{y}^1\operatorname{sh}\theta)^2 + k_1(-\bar{y}^0\operatorname{sh}\theta + \bar{y}^1\operatorname{ch}\theta)^2 + $$
$$+ 2a_1(\bar{y}^0 \operatorname{ch}\theta - \bar{y}^1 \operatorname{sh}\theta)(-\bar{y}^0\operatorname{sh}\theta + \bar{y}^1 \operatorname{ch}\theta).$$

Coeficientul în $\bar{y}^0\bar{y}^1$ este

(12) $$2\bar{a}_1 = 2a_1 \operatorname{ch} 2\theta - (k_0 + k_1) \operatorname{sh} 2\theta;$$

deci se anulează pentru

(13) $$\operatorname{th} 2\theta = \frac{2a_1}{k_0 + k_1}$$

Dar

$$\operatorname{th} x = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1}, \quad e^{2x} = \frac{1 + \operatorname{th} x}{1 - \operatorname{th} x},$$

deci

(14) $$e^{4\theta} = \frac{k_0 + k_1 + 2a_1}{k_0 + k_1 - 2a_1} = \frac{(k_0 + k_1 + 2a_1)^2}{(k_0 + k_1)^2 - 4a_1^2},$$

e) Conform cu (9) şi deoarece $e^x > 0$, putem să determinăm unghiul θ astfel încît să anulăm şi coeficientul a_1, lăsînd forma φ fundamentală neschimbată. Avem deci forma canonică

(15) $$\psi = t_{00}(ds^0)^2 + t_{11}(ds^1)^2 - t_{22}(ds^2)^2 - t_{33}(ds^3)^2,$$

t_{00} şi t_{11} fiind rădăcinile ecuaţiei (8). Avem deci

(16) $$t_{ab} = 0, \quad a \neq b,$$

şi conform cu (11) din §1, şi

(17) $$r_{ab} = 0, \quad a \neq b.$$

Ecuațiile Einstein devin

$$(18) \qquad r_{00} + \frac{r}{2} = -\varkappa t_{00}, \quad r_{aa} - \frac{r}{2} = -\varkappa t_{aa},$$

$(a = 1, 2, 3)$.

f) Din (11) avem și

$$(19) \qquad \bar{k}_0 + \bar{k}_1 = (k_0 + k_1)\,\mathrm{ch}2\theta - 2a_1\,\mathrm{sh}2\theta.$$

În cazul în care ecuația (8) are rădăcini complexe, deci, după (14), nu putem să determinăm unghiul θ și să efectuăm reducerea precedentă la forma canonică (15), putem să folosim relația (19) ca să anulăm pe $\bar{k}_0 + \bar{k}_1$, luînd

$$(20) \qquad \mathrm{th}\,2\theta = \frac{k_0 + k_1}{2a_1}.$$

Atunci

$$e^{4\theta} = \frac{2a_1 + k_0 + k_1}{2a_1 - (k_0 + k_1)} = \frac{(2a_1 + k_0 + k_1)^2}{4a_1^2 - (k_0 + k_1)^2} > 0,$$

dacă ecuația (8) are rădăcini complexe, deci $d < 0$. Avem deci

$$(21) \qquad \psi = t_{00}[(ds^0)^2 - (ds^1)^2] - t_{22}(ds^2)^2 - t_{33}(ds^3)^2 + 2t_{01}\,ds^0\,ds^1$$

și în acest caz

$$(22) \qquad t_{00} + t_{11} = 0, \quad t_{01} = a_1, \quad t_{02} = t_{03} = 0, \quad t_{ab} = 0$$

$(a, b = 1, 2, 3)$, deci și $r_{\alpha\beta}$ satisfac acelorași relații $(\alpha, \beta = 0, 1, 2, 3)$. Avem în acest caz, forma canonică a relațiilor Einstein

$$(23) \qquad r_{00} + \frac{r}{2} = -\varkappa t_{00}, \quad r_{00} + r_{11} = 0, \quad r_{01} = -\varkappa t_{01},$$
$$r_{22} - \frac{r}{2} = -\varkappa t_{22}, \quad r_{33} - \frac{r}{2} = -\varkappa t_{33}.$$

g) În cazul în care discriminantul d este nul, deci $\rho_0 = \rho_4$, avem de considerat două cazuri.

Dacă $a_1 = t_0$ este nul, avem formulele (23) cu $t_{01} = 0$.

Dacă $a_1 \neq 0$, printr-o transformare (1.13) avem relațiile (12), (19):

$$(24) \qquad 2\bar{a}_1 = 2a_1\,\mathrm{ch}\,2\theta - (k_0 + k_1)\,\mathrm{sh}\,2\theta$$
$$\bar{k}_0 + \bar{k}_1 = (k_0 + k_1)\,\mathrm{ch}\,2\theta - 2a_1\,\mathrm{sh}\,2\theta;$$

ele sînt compatibile în θ dacă

$$\frac{2\bar{a}_1}{\bar{k}_0 + \bar{k}_1} = \frac{2a_1}{k_0 + k_1} = \frac{k_0 + k_1}{2a_1},$$

ultima relație rezultă din $d = (k_0 + k_1)^2 - 4a_1^2 = 0$. Deci

$$(25) \qquad \frac{a_1}{k_0 + k_1}$$

este o expresie invariantă. Este simplu să luăm

$$(26) \qquad a_1 = 1, \quad k_0 + k_1 = 2,$$

relație conservată în transformarea (24). Atunci

$$(27) \qquad \psi = t_{00}[(ds^0)^2 - (ds^1)^2] + 2(ds^1)^2 - t_{22}(ds^2)^2 - t_{33}(ds^3)^2 + 2\,ds^0\,ds^1$$

și ecuațiile Einstein sînt

$$(28) \qquad r_{00} + \frac{r}{2} = -\varkappa t_{00}, \quad r_{00} + r_{11} = 2\varkappa, \quad r_{01} = \varkappa,$$
$$r_{22} - \frac{r}{2} = -\varkappa t_{22}, \quad r_{33} - \frac{r}{2} = -\varkappa t_{33}, \quad r_{0a} = 0, \; r_{ab} = 0,$$

$(a, b = 1, 2, 3)$.

În concluzie, *putem să reducem tensorul energie la formele canonice* (15), (21) *sau* (27) *și ecuațiile Einstein la formele canonice* (18), (23) *sau* (28) (G. Vrănceanu, 1967).

3. Cazul metricii cu simetrie sferică generală. a) Aplicăm aceste rezultate în cazul metricii cu simetrie sferică generală

(1) $ds^2 = -V^2 (dx^0)^2 + A^2(dx^1)^2 + (x^1)^2 [(dx^2)^2 + \sin^2 x^2 (dx^3)^2]$,

unde V și A sînt funcții de x^0 și x^1 deci

(2) $\varphi = V^2(dx^0)^2 - A^2(dx^1)^2 - (x^1)^2 [(dx^2)^2 + \sin^2 x^2 (dx^3)^2]$.

Scriem pe φ sub forma

(3) $$\varphi = (ds^0)^2 - (ds^1)^2 - (ds^2)^2 - (ds^3)^2,$$

punînd

(4) $ds^0 = V\, dx^0, \quad ds^1 = A\, dx^1, \quad ds^2 = x^1\, dx^2, \quad ds^3 = x^1 \sin x^2\, dx^3$,

adică, conform notațiilor obișnuite din teoria congruențelor,

(5) $$\lambda_0^0 = V, \quad \lambda_1^1 = A, \quad \lambda_2^2 = x^1, \quad \lambda_3^3 = x^1 \sin x^2,$$

restul $\lambda_b^a = 0$. Conform formulelor

$$T_{ij} = t_{ab} \lambda_i^a \lambda_j^b, \quad R_{ij} = r_{ab} \lambda_i^a \lambda_j^b$$

avem

(6) $$T_{00} = V^2 t_{00}, \quad T_{11} = A^2 t_{11}, \quad T_{22} = (x^1)^2\, t_{22},$$
$$T_{33} = (x^1)^2 \sin^2 x^2\, t_{33}, \quad T_{01} = A\, V\, t_{01}$$

și

(7) $$R_{00} = V^2 r_{00}, \quad R_{11} = A^2 r_{11}, \quad R_{22} = (x^1)^2 r_{22},$$
$$R_{33} = (x^1)^2 \sin^2 x^2\, r_{33}, \quad R_{01} = A\, V\, r_{01}$$

iar

(8) $$R = r = r_{00} - r_{11} - r_{22} - r_{33}$$
$$T = t = t_{00} - t_{11} - t_{22} - t_{33}.$$

b) Din relațiile (13) din B.3, (7) din B.4

$$R_{33} = R_{22} \sin^2 x^2, \quad T_{33} = T_{22} \sin^2 x^2$$

rezultă

(9) $$t_{22} = t_{33},$$

deci ecuația (2.8) are rădăcinile ρ_2 și ρ_3 egale.

c) Deoarece reducerea la formă canonică a tensorului t_{ab} sau r_{ab} este aceeași problemă, vom urmări pentru detaliere, reducerea formei

(10) $$\psi = r_{ab} ds^a\, ds^b.$$

Avem din (7), §2

$$\rho_2 = -k_2 = -r_{22} = -\frac{R_{22}}{(x^1)^2},$$

deci

(11) $$\rho_2 = \rho_3 = -\frac{R_{22}}{(x^1)^2}.$$

Ecuația (8) din §2 devine

$$\rho^2 + (r_{11} - r_{00})\rho + r_{01}^2 - r_{00}\, r_{11} = 0,$$

deci prin formulele (7)

(12) $$A^2 V^2 \rho^2 + (R_{11} V^2 - R_{00} A^2)\rho + R_{01}^2 - R_{00}\, R_{11} = 0.$$

14 – c. 1767

Avem deci

$$(13)\qquad \rho_0 + \rho_1 = \frac{R_{00}}{V^2} - \frac{R_{11}}{A^2}, \quad \rho_0 \rho_1 = \frac{R_{01}^2 - R_{00}\, R_{11}}{A^2V^2}$$

Deci o metrică cu simetrie sferică posedă invarianţii distincţi în general,

$$(14)\qquad a = \frac{R_{22}}{(x^1)^2}, \quad b = \frac{R_{00}}{V^2} - \frac{R_{11}}{A^2}, \quad c = \frac{R_{01}^2 - R_{00}\, R_{01}}{A^2V^2}.$$

Discriminantul

$$(15)\qquad d = (R_{00}A^2 + R_{11}V^2)^2 - 4\, A^2V^2R_{01}^2$$

poate să aibă rădăcini reale sau complexe.

d) Dacă ecuaţia (12) are rădăcini reale, putem să anulăm pe r_{01}, deci pe R_{01}. Atunci

$$(16)\qquad R_{22} = a(x^1)^2, \quad R_{33} = a(x^1)^2 \sin^2 x^2$$

iar R_{00}/A^2, $- R_{11}/V^2$ sînt rădăcinile ecuaţiei invariante

$$\rho^2 + b\,\rho + c = 0,$$

deci

$$(17)\qquad R_{00} = hA^2, \quad R_{11} = kV^2$$

h şi k fiind invarianţi.

4. Indicaţii bibliografice. Reducerea la formă canonică a ecuaţiilor Einstein este datorită prof. G. Vrănceanu. Să se consulte:

Vrănceanu, G. Teleman C. *Geometrie euclidiană, geometrii neeuclidiene şi teoria relativităţii*. Ed. II. Bucureşti, Editura tehnică, 1966.

Vrănceanu, G. *Forme canonique des équations gravitationnelles*. Mathematische Nachrichten, 33, 1967, 5/6, p. 339–346.

D. SCUFUNDAREA METRICILOR RELATIVISTE

1. Scufundarea metricii Schwarzschild. *Metrica Schwarzschild*

$$(1)\qquad ds^2 = - c^2\left(1 - \frac{a}{r}\right)dt^2 + \frac{dr^2}{1 - \frac{a}{r}} + r^2\,(d\,\theta^2 + \sin^2\theta\, d\,\varphi^2)$$

admite o scufundare într-un spaţiu pseudoeuclidian cu şase dimensiuni

$$(2)\qquad ds^2 = - dz_1^2 - dz_2^2 + dz_3^2 + dz_4^2 + dz_5^2 + dz_6^2.$$

Ca să justificăm această afirmaţie observăm că pentru parametrii r, θ şi φ în coordonate polare, conform metricii euclidiene avem

$$(3)\qquad dz_4^2 + dz_5^2 + dz_6^2 = dr^2 + r^2(d\,\theta^2 + \sin^2\theta\, d\,\varphi^2).$$

Rămîne să justificăm enunţul pentru primele coordonate. Punem

$$(4)\qquad z_1 = \mu(r)\sin\frac{ct}{k}, \quad z_2 = \mu(r)\cos\frac{ct}{k},$$

$\mu(r)$ fiind o funcţie pe care vom determina-o prin condiţie a problemei. Avem

$$dz_1 = d\mu\,\sin\frac{ct}{k} + \frac{c}{k}\,\mu\cos\frac{ct}{k}\,dt,$$

$$dz_2 = d\mu\,\cos\frac{ct}{k} - \frac{c}{k}\,\mu\sin\frac{ct}{k}\,dt,$$

deci

$$(5)\qquad dz_1^2 + dz_2^2 = d\mu^2 + \frac{c^2}{k^2}\,\mu^2\,dt^2.$$

Punem şi

$$(6)\qquad z_3 = f(r).$$

Trebuie să avem conform calculelor de pînă acuma

$$- dz_1^2 - dz_2^2 + dz_3^2 = - \mu'^2\,dr^2 - \frac{c^2}{k^2}\,\mu^2\,dt^2 + f'^2\,dr^2 =$$

$$= - c^2\left(1 - \frac{a}{r}\right)dt^2 + \frac{dr^2}{1 - \frac{a}{r}} - dr^2.$$

Identificăm coeficienţii în dt; avem

$$(7)\qquad \mu = k\left(1 - \frac{a}{r}\right)^{\frac{1}{2}}$$

şi din identificarea coeficienţilor rămaşi

$$-\frac{k^2a^2}{4r^4}\left(1-\frac{a}{r}\right)^{-1}+f'^2=\left(1-\frac{a}{r}\right)^{-1}-1,$$

(8) $$f'^2(r)=\frac{a}{4r^3}\,\frac{k^2a+4r^3}{r-a},$$

de unde rezultă funcţia $f(r)$.

Avem deci *formulele de scufundare*

$$z_1=k\left(1-\frac{a}{r}\right)^{\frac{1}{2}}\sin\frac{ct}{k},\quad z_2=k\left(1-\frac{a}{r}\right)^{\frac{1}{2}}\cos\frac{ct}{k},$$

(9) $$z_3=f(r),$$

$$z_4=r\cos\varphi\sin\theta,\quad z_5=r\sin\varphi\sin\theta,\quad z_6=r\cos\theta.$$

2. Scufundarea metricii ρ. a) O metrică mai generală decît aceea a lui Schwarzschild este de forma

(1) $$ds^2=-V^2\,dt^2+A^2\,dr^2+r^2(d\theta^2+\sin^2\theta\,d\varphi^2),$$

unde

(2) $$V^2=c^2(1+\rho),\quad A^2=(1+\rho)^{-1},\quad \rho=\rho(r),$$

funcţia ρ fiind cunoscută. Spunem că (1) cu condiţiile (2) este *o metrică* ρ.

Cu aceeaşi observaţie pentru coordonatele polare

(3) $$dz_4^2+dz_5^2+dz_6^2=dr^2+r^2(d\theta^2+\sin^2\theta\,d\varphi^2)$$

rămîne să determinăm formulele

(4) $$z_1=\mu(r)\sin\frac{ct}{k},\quad z_2=\mu(r)\cos\frac{ct}{k},\quad z_3=f(r)$$

prin condiţia ca să scriem metrica (1) sub forma de scufundare

(5) $$ds^2=-dz_1^2-dz_2^2+dz_3^2+dz_4^2+dz_5^2+dz_6^2$$

într-un spaţiu pseudoeuclidian cu şase dimensiuni. Obţinem

(6) $$dz_1^2+dz_2^2=d\mu^2+\frac{c^2}{k^2}\mu^2\,dt^2$$

şi trebuie să avem

$$-dz_1^2-dz_2^2+dz_3^2=-\mu'^2\,dr^2-\frac{c^2}{k^2}\mu^2\,dt^2+f'^2\,dr^2=$$

$$=-c^2(1+\rho)dt^2+\frac{dr^2}{1+\rho}-dr^2.$$

Identificînd coeficienţii în dt, avem

(7) $$\mu=k(1+\rho)^{\frac{1}{2}}$$

şi din identificarea coeficienţilor rămaşi

$$-\frac{1}{4}k^2\rho'^2(1+\rho)^{-1}+f'^2=(1+\rho)^{-1}-1,$$

de unde

(8) $$f'^2=\frac{k^2\rho'^2-4\rho}{4(1+\rho)}$$

care permite determinarea funcţiei f.

b) Obţinem o scufundare în spaţiul pseudoeuclidian

(9) $$ds^2=-dz_1^2+dz_2^2+dz_3^2+dz_4^2+dz_5^2+dz_6^2$$

luînd în loc de (6)

(10) $$z_1=\mu(r)\,\mathrm{sh}\,\frac{ct}{k},\quad z_2=\mu(r)\,\mathrm{ch}\,\frac{ct}{k},\quad z_3=f(r).$$

Avem atunci

(11) $$-dz_1^2+dz_2^2=d\mu^2-\frac{c^2}{k^2}\mu^2\,dt^2.$$

Determinăm aceeaşi funcţie μ, dată de (7) şi

(12) $$f'^2 = -\frac{k^2\rho'^2 + 4\rho}{4(1+\rho)}.$$

c) Pentru

(13) $$\rho = -\frac{a}{r}$$

avem metrica Schwarzschild şi formulele (1.9). Cazul (12) necesită $r < a$, deci nu este posibil.

Pentru

(14) $$\rho = -\frac{a}{r} + \frac{e^2}{r^2},$$

unde e este sarcina electrică, avem metrica dată de H. Reissner (1916) şi H. Weyl (1917).

Pentru

(15) $$\rho = -\frac{a}{r} + \gamma r^2$$

avem spaţiul Einstein. Dacă $\gamma = \frac{1}{k^2}$ obţinem

(16) $$f'^2 = \frac{ak}{4r^4}\frac{(ak+8r^2)}{\left(1 - \frac{a}{r} + \frac{r^2}{k^2}\right)}.$$

3. Geodezicele metricii ρ. a) Considerăm un spaţiu riemannian cu n dimensiuni admiţînd o metrică de forma

(1) $$ds^2 = -V(dx^0)^2 + \varepsilon\, d\sigma^2 = V_{\alpha\beta}dx^\alpha dx^\beta$$

(α, $\beta = 0, 1, 2, \ldots, n-1$), unde $\varepsilon = \pm 1$, iar σ este o formă riemanniană în $n-1$ dimensiuni:

(2) $$d\sigma^2 = b_{ij}dx^i dx^j \quad (i,\ j = 1,\ 2, \ldots, n-1)$$

iar V o funcţie de $x^1, x^2, \ldots, x^{n-1}$. Avem pentru metrica (1) forţa vie

$$T = \frac{1}{2}m\frac{ds^2}{dt^2} = \frac{m}{2}a_{\alpha\beta}\dot{x}^\alpha\dot{x}^\beta = \varepsilon\frac{m}{2}b_{ij}\dot{x}^i\dot{x}^j - \frac{m}{2}V(\dot{x}^0)^2$$

sau

(3) $$T = \varepsilon T' - \frac{m}{2}V(\dot{x}^0)^2,$$

T' fiind forţa vie a metricii (2).

Să determinăm geodezicele metricii (1). Avem formulele

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{x}^\alpha} - \frac{\partial T}{\partial x^\alpha} = 0.$$

Scriem separat ecuaţiile; pentru indicele 0 avem

(4) $$\frac{d}{dt}(V\dot{x}^0) = 0, \quad V\dot{x}^0 = k(\text{const}).$$

Pentru indicii $1, 2, \ldots, n-1$ avem

(5) $$\varepsilon\left(\frac{d}{dt}\frac{\partial T'}{\partial \dot{x}^i} - \frac{\partial T'}{\partial x^i}\right) + \frac{m}{2}\frac{\partial V}{\partial x^i}(\dot{x}^0)^2 = 0;$$

ţinînd seama de (4),

(6) $$\frac{d}{dt}\frac{\partial T'}{\partial \dot{x}^i} - \frac{\partial T'}{\partial x^i} = -\frac{m}{2\varepsilon}\frac{\partial V}{\partial x^i}\frac{k^2}{V^2} = \varepsilon\frac{m}{2}\frac{\partial}{\partial x^i}\left(\frac{k^2}{V}\right).$$

Putem să-l alegem pe x^0 astfel ca în (4), $k = c$, c fiind viteza luminii.

Deci *geodezicele unui spaţiu Riemann V_n cu metrica de forma* (1) *sînt traiectoriile unui punct în V_{n-1} asociat sub influenţa unui cîmp de forţe derivînd din potenţialul*

(7) $$W = m\frac{\varepsilon}{2}\frac{c^2}{V}$$

iar x^0 este determinată ca funcţie de t, prin (4) unde $k = c$.

Rezultă din (3)

(8) $$T = \varepsilon(T' - W),$$

deci pentru

(9) $$T' = W$$

avem $T = 0$, adică geodezice de lungime nulă.

b) Metrica relativității restrînse este de forma (1), unde

$$\varepsilon = 1, \quad \mathrm{d}\sigma^2 = \mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2 + \mathrm{d}z^2, \quad V = 1, \quad x^0 = ct$$

și din (7), $W = \dfrac{mc^2}{2}$, care nu depinde de x, y, z, deci, conform cu (6), geodezicele relativității restrînse sînt linii drepte.

Avem $T' = \dfrac{mv^2}{2}$, deci pentru $v = c$, adică pentru razele luminoase regăsim rezultatul din (9) că traiectoriile razelor luminoase sînt geodezice de lungime nulă, în teoria relativității.

c) Metricile

$$\mathrm{d}s^2 = -c^2(1+\rho)\,\mathrm{d}t^2 + \frac{\mathrm{d}r^2}{1+\rho} + r^2(\mathrm{d}\theta^2 + \sin^2\theta\,\mathrm{d}\varphi^2)$$

și metrica relativității restrînse

$$\mathrm{d}\sigma^2 = -c^2\mathrm{d}t^2 + \mathrm{d}r^2 + r^2(\mathrm{d}\theta^2 + \sin^2\theta\,\mathrm{d}\varphi^2)$$

stau în relația

$$\mathrm{d}s^2 = \mathrm{d}\sigma^2 - c^2\rho\left(\mathrm{d}t^2 - \frac{1}{c^2(1+\rho)}\,\mathrm{d}r^2\right).$$

Termenul al doilea al parantezei are un coeficient foarte mic încît pentru $|\rho|$ mărginit putem să-l neglijăm. Avem deci

(10) $$\mathrm{d}s^2 = \mathrm{d}\sigma^2 - c^2\rho\,\mathrm{d}t^2$$

sau

(11) $$\mathrm{d}s^2 = -c^2(1+\rho)\mathrm{d}t^2 + \mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2 + \mathrm{d}z^2,$$

deci o metrică (1) pentru care

$$V = 1 + \rho, \quad \varepsilon = 1, \quad \mathrm{d}\sigma^2 = \mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2 + \mathrm{d}z^2,$$

deci din (7)

(12) $$W = \frac{m}{2}\,\frac{c^2}{1+\rho}.$$

Sub influența forței centrale (12) avem o primă integrală, integrala ariilor, pe care o scriem în coordonate polare

(13) $$r^2\dot{\theta} = l = \text{const.}$$

Avem pentru geodezice o altă integrală (9)

$$T' = \frac{m}{2}\,a_{ij}\,\mathrm{d}\dot{x}^i\mathrm{d}\dot{x}^j = W \quad (i, j = 1, 2, 3),$$

deci

$$\frac{m}{2}\,(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) = \frac{mc^2}{2}\,\frac{1}{1+\rho}.$$

Trecînd la coordonate polare, avem

(14) $$\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 = \frac{c^2}{1+\rho}$$

și eliminîndu-l pe t, avem, notînd $s = 1/r$,

(15) $$\frac{\mathrm{d}s^2}{\mathrm{d}\theta^2} + s^2 = \frac{c^2}{l^2(1+\rho)},$$

unde ρ este funcție de s. Cînd $\rho = \text{const}$, cazul metricii relativității restrînse, avem prin derivare în raport cu θ:

$$\frac{\mathrm{d}^2 s}{\mathrm{d}\theta^2} + s = 0, \quad as = \cos(\theta - \theta_0),$$

deci $r = \dfrac{a}{\cos(\theta - \theta_0)}$ este ecuația unei drepte în coordonate polare.

În general, geodezicele nu sînt drepte și ecuația lor este dată de (15) în coordonate polare.

4. Curbura metricii ρ. a) Considerăm metrica ρ

(1) $$\mathrm{d}s^2 = -V^2(\mathrm{d}x^0)^2 + A^2(\mathrm{d}x^1)^2 + (x^1)^2[(\mathrm{d}x^2)^2 + \sin^2 x^2\,(\mathrm{d}x^3)^2],$$

unde

(2) $$V^2 = 1 + \rho, \quad A^2 = \frac{1}{1+\rho}, \quad \rho = \rho(x^1).$$

Conform formulelor (B. 2) avem

$$\Big(= \frac{1}{2}\,\rho_1(1+\rho),\quad \begin{pmatrix} 0 \\ 0\;\;1\end{pmatrix} = \frac{\rho_1}{2(1+\rho)},\quad \begin{pmatrix} 1 \\ 1\;\;1\end{pmatrix} = -\frac{\rho_1}{2(1+\rho)},$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2\;\;2\end{pmatrix} = -x^1(1+\rho),\quad \begin{pmatrix} 1 \\ 3\;\;3\end{pmatrix} = -x^1(1+\rho)\sin^2 x^2,\quad \begin{pmatrix} 2 \\ 1\;\;2\end{pmatrix} = \frac{1}{x^1},$$

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 1\;\;3\end{pmatrix} = \frac{1}{x^1},\quad \begin{pmatrix} 2 \\ 3\;\;3\end{pmatrix} = -\sin x^2\cos x^2,\quad \begin{pmatrix} 3 \\ 2\;\;3\end{pmatrix} = \operatorname{ctg} x^2,$$

restul simbolurilor Christoffel fiind nule.

b) Avem tensorul de curbură

$$R^i_{jkl} = -\frac{\partial\begin{pmatrix} i \\ j\;\;k\end{pmatrix}}{\partial x^l} + \frac{\partial\begin{pmatrix} i \\ j\;\;l\end{pmatrix}}{\partial x^k} + \begin{pmatrix} i \\ s\;\;k\end{pmatrix}\begin{pmatrix} s \\ j\;\;k\end{pmatrix} - \begin{pmatrix} i \\ s\;\;l\end{pmatrix}\begin{pmatrix} s \\ j\;\;k\end{pmatrix}.$$

Rezultă

(4) $$R^i_{jji} = -\frac{\partial\begin{pmatrix} i \\ j\;\;j\end{pmatrix}}{\partial x^i} + \frac{\partial\begin{pmatrix} i \\ j\;\;i\end{pmatrix}}{\partial x^k} + \begin{pmatrix} i \\ s\;\;j\end{pmatrix}\begin{pmatrix} s \\ j\;\;i\end{pmatrix} - \begin{pmatrix} i \\ s\;\;i\end{pmatrix}\begin{pmatrix} s \\ j\;\;j\end{pmatrix}$$

Pentru $j = 0$,

$$R^i_{00i} = -\frac{\partial\begin{pmatrix} i \\ 0\;\;0\end{pmatrix}}{\partial x^i} + \begin{pmatrix} i \\ s\;\;0\end{pmatrix}\begin{pmatrix} s \\ 0\;\;i\end{pmatrix} - \begin{pmatrix} i \\ s\;\;i\end{pmatrix}\begin{pmatrix} s \\ 0\;\;0\end{pmatrix}.$$

Atunci

$$R^1_{001} = -\frac{\partial\begin{pmatrix} 1 \\ 0\;\;0\end{pmatrix}}{\partial x^1} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0\;\;0\end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 0\;\;1\end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 1\;\;1\end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0\;\;0\end{pmatrix},$$

(5) $$R^1_{001} = -\frac{1}{2}\,\rho_{11}(1+\rho).$$

De asemenea

(6) $$R^2_{002} = -\begin{pmatrix} 2 \\ 1\;\;2\end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0\;\;0\end{pmatrix},\quad R^2_{002} = -\frac{1}{2x^1}\,\rho_1(1+\rho);$$

(7) $$R^3_{003} = -\begin{pmatrix} 3 \\ 1\;\;3\end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0\;\;0\end{pmatrix},\quad R^3_{003} = -\frac{1}{2x^1}\,\rho_1(1+\rho).$$

Pentru $j = 1$,

$$R^i_{11i} = -\frac{\partial\begin{pmatrix} i \\ 1\;\;1\end{pmatrix}}{\partial x^i} + \frac{\partial\begin{pmatrix} i \\ 1\;\;i\end{pmatrix}}{\partial x^1} + \begin{pmatrix} i \\ s\;\;1\end{pmatrix}\begin{pmatrix} s \\ 1\;\;i\end{pmatrix} - \begin{pmatrix} i \\ s\;\;i\end{pmatrix}\begin{pmatrix} s \\ 1\;\;1\end{pmatrix}.$$

Atunci

$$R^0_{110} = \frac{\partial\begin{pmatrix} 0 \\ 0\;\;1\end{pmatrix}}{\partial x^1} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0\;\;1\end{pmatrix}^2 - \begin{pmatrix} 0 \\ 0\;\;1\end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1\;\;1\end{pmatrix},$$

(8) $$R^0_{110} = \frac{\rho_{11}}{2(1+\rho)};$$

$$R^2_{112} = \frac{\partial\begin{pmatrix} 2 \\ 1\;\;2\end{pmatrix}}{\partial x^1} + \begin{pmatrix} 2 \\ 1\;\;2\end{pmatrix}^2 - \begin{pmatrix} 2 \\ 1\;\;2\end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1\;\;1\end{pmatrix},$$

(9) $$R^2_{112} = \frac{1}{2x^1}\,\frac{\rho_1}{1+\rho};$$

$$R^3_{113} = \frac{\partial\begin{pmatrix} 3 \\ 1\;\;3\end{pmatrix}}{\partial x^1} + \begin{pmatrix} 3 \\ 1\;\;3\end{pmatrix}^2 - \begin{pmatrix} 3 \\ 1\;\;3\end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1\;\;1\end{pmatrix},$$

(10) $$R^3_{113} = \frac{1}{2x^1}\,\frac{\rho_1}{1+\rho}.$$

Pentru $j = 2$

$$R^i_{22i} = -\frac{\partial\begin{pmatrix} i \\ 2\;\;2\end{pmatrix}}{\partial x^1} + \frac{\partial\begin{pmatrix} i \\ 2\;\;i\end{pmatrix}}{\partial x^2} + \begin{pmatrix} i \\ s\;\;2\end{pmatrix}\begin{pmatrix} s \\ 2\;\;2\end{pmatrix}.$$

Atunci

$$R^0_{220} = -\begin{pmatrix} 0 \\ 1\;\;0\end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 2\;\;2\end{pmatrix},$$

(11) $$R^2_{220} = \frac{1}{2}\,x^1\rho_1;$$

$$R^1_{221} = -\frac{\partial\begin{pmatrix} 1 \\ 2\;\;2\end{pmatrix}}{\partial x^1} + \begin{pmatrix} 1 \\ 2\;\;2\end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 1\;\;2\end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 1\;\;1\end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 2\;\;2\end{pmatrix},$$

(12) $$R^1_{221} = \frac{1}{2} x^1 \rho_1 ;$$

$$R^3_{223} = \frac{\partial \left({3 \atop 2\ 3} \right)}{\partial x^2} + \left({3 \atop 2\ 3} \right)^2 - \left({3 \atop 1\ 3} \right)\left({1 \atop 2\ 2} \right),$$

(13) $$R^3_{223} = \rho .$$

Pentru $j = 3$,

$$R^i_{33i} = - \frac{\partial \left({i \atop 3\ 3} \right)}{\partial x^i} + \left({i \atop s\ 3} \right)\left({s \atop 3\ i} \right) - \left({i \atop s\ i} \right)\left({s \atop 3\ 3} \right).$$

Atunci

$$R^0_{330} = - \left({0 \atop 0\ 1} \right)\left({1 \atop 3\ 3} \right),$$

(14) $$R^0_{330} = \frac{1}{2} x^1 \rho_1 \sin^2 x^2 ;$$

$$R^1_{331} = - \frac{\partial \left({1 \atop 3\ 3} \right)}{\partial x^1} + \left({1 \atop 3\ 3} \right)\left({3 \atop 1\ 3} \right) - \left({1 \atop 1\ 1} \right)\left({1 \atop 3\ 3} \right),$$

(15) $$R^1_{331} = \frac{1}{2} x^1 \rho_1 \sin^2 x^2 ;$$

$$R^2_{332} = - \frac{\partial \left({2 \atop 3\ 3} \right)}{\partial x^2} + \left({2 \atop 3\ 3} \right)\left({3 \atop 3\ 2} \right) - \left({2 \atop 1\ 2} \right)\left({1 \atop 3\ 3} \right).$$

(16) $$R^2_{332} = \rho \sin^2 x^2 .$$

c) Avem şi

$$R^{ih}_{kl} = g^{hj} R^i_{jkl} = g^{hh} R^i_{hkl}$$

şi după formulele (4) din B.2

(17) $$R^{ij}_{kl} = \frac{1}{g_{jj}} R^i_{jkl}$$

fără sumare în raport cu j. Deoarece toate simbolurile Riemann nenule sînt de forma $R^i_{jji} = - R^i_{jij}$, avem

(18) $$R^{ij}_{ij} = - \frac{1}{g_{jj}} R^i_{jij} .$$

Deoarece $R^{ij}_{ij} = R^{ji}_{ji}$, avem singurele valori distincte

$$R^{01}_{01} = - (1 + \rho) R^0_{110} = - \frac{1}{2} \rho_{11},$$

$$R^{02}_{02} = - \frac{1}{(x^1)^2} R^0_{202} = - \frac{1}{2x^1} \rho_1, \quad R^{03}_{03} = - \frac{1}{2x^1} \rho_1,$$

$$R^{12}_{12} = - \frac{1}{(x^1)^2} R^1_{221} = - \frac{1}{2x^1} \rho_1, \quad R^{13}_{13} = - \frac{1}{2x^1} \rho_1,$$

$$R^{23}_{23} = - \frac{1}{(x^1)^2 \sin^2 x^2} R^2_{332} = - \frac{\rho}{(x^1)^2} .$$

Avem deci

(19) $$R^{01}_{01} = - \frac{1}{2} \rho_{11},$$

(20) $$R^{02}_{02} = R^{03}_{03} = R^{12}_{12} = R^{13}_{13} = - \frac{1}{2x^1} \rho_1 .$$

(21) $$R^{23}_{23} = - \frac{\rho}{(x^1)^2} .$$

d) Pentru tensorul Ricci, conform formulelor (B. 3. c), avem

$$R_{00} = \frac{V V_{11}}{A^2} + \frac{2 V V_1}{A^2 x^1} - \frac{V A_1 V_1}{A^3},$$

$$R_{11} = - \frac{V_{11}}{V} + 2 \frac{A_1}{A x^1} + \frac{A_1 V_1}{A V},$$

$$R_{22} = 1 - \frac{1}{A^2} + \frac{A_1 x^1}{A^3} - \frac{V_1 x^1}{V A^2},$$

$$R_{33} = R_{22} \sin^2 x^2,$$

$$R_{01} = 0 .$$

Dar din (2) rezultă

$$2VV_1 = \rho_1, \quad 2AA_1 = -\frac{\rho_1}{(1+\rho)^2},$$

$$VV_{11} = \frac{1}{2}\rho_{11} - V_1^2$$

deci

(22) $$R_{00} = (1+\rho)\left(\frac{\rho_{11}}{2} + \frac{\rho_1}{x^1}\right),$$

(23) $$R_{11} = -\frac{1}{1+\rho}\left(\frac{\rho_{11}}{2} + \frac{\rho_1}{x^1}\right),$$

(24) $$R_{22} = -\rho - x^1\rho_1.$$

Avem şi

$$R^i_j = g^{ih}R_{hj} = g^{ii}R_{ij},$$

deci

(25) $$R^i_i = \frac{R_{ii}}{g_{ii}}$$

fără sumare. Rezultă

(26) $$R^0_0 = R^1_1 = -\left(\frac{\rho_{11}}{2} + \frac{\rho_1}{x^1}\right), \quad R^2_2 = R^3_3 = -\left(\frac{\rho}{(x^1)^2} + \frac{\rho_1}{x^1}\right).$$

e) Pentru invariantul Ricci avem

$$R = g^{00}R_{00} + g^{11}R_{11} + g^{22}R_{22} + g^{33}R_{33} =$$

$$= \frac{R_{00}}{g_{00}} + \frac{R_{11}}{g_{11}} + 2\frac{R_{22}}{g_{22}} = 2(R^0_0 + R^2_2);$$

deci

(27) $$R = -\left(\rho_{11} + 4\frac{\rho_1}{x^1} + \frac{2\rho}{(x^1)^2}\right).$$

f) Condiţia ca invariantul Ricci să fie nul este ca

$$\rho_{11} + 4\frac{\rho_1}{x^1} + \frac{2\rho}{(x^1)^2} = 0.$$

Punem $\rho = (x^1)^r$; obţinem

$$r(r-1) + 4r + 2 = 0$$

cu rădăcinile -1, -2. Avem integrala

(28) $$\rho = \frac{a}{x^1} + \frac{b}{(x^1)^2},$$

deci spaţiul Reissner-Weyl, care poate să fie caracterizat prin această proprietate.

Deci *o metrică ρ cu tensor Ricci nul este o metrică Reissner-Weyl.* În acest caz, notînd simplu, $x^1 = r$, avem

$$\rho_1 = -\frac{a}{r^2} - \frac{2b}{r^3}, \quad \rho_{11} = \frac{2a}{r^3} + \frac{6b}{r^4},$$

$$\frac{\rho}{r^2} + \frac{\rho_1}{r} = -\frac{b}{r^4}, \quad \frac{\rho_{11}}{2} + \frac{\rho_1}{r} = \frac{b}{r^4},$$

deci (26) devin

(29) $$R^0_0 = R^1_1 = -\frac{b}{(x^1)^4}, \quad R^2_2 = R^3_3 = \frac{b}{(x^1)^4}.$$

g) Pentru $R = k =$ const, adăugăm la integrala (28) a ecuaţiei omogene o integrală particulară de forma $\alpha(x^1)^2$, deci $\alpha = \frac{k}{12}$. Obţinem

(30) $$\rho = \frac{a}{x^1} + \frac{b}{(x^1)^2} + \frac{k(x^1)^2}{12}.$$

Pentru $b = 0$ avem metrica Einstein cu simetrie sferică.

5. Detalierea relaţiilor de scufundare. a) Metricile relativiste studiate pînă acum sînt riemanniene cu patru dimensiuni. Problema scufundării lor într-un spaţiu pseudoeuclidian cu şase dimensiuni sau, ceea ce este acelaşi lucru, neeuclidian cu cinci dimensiuni în coordonate omogene, poate să fie studiată după teoria generală.

Fie $M(x^0, x^1, x^2, x^3)$ un punct al varietăţii V_4 de metrică

(1) $$ds^2 = -(1+\rho)(dx^0)^2 + \frac{(dx^1)^2}{1+\rho} + (x^1)^2[(dx^2)^2 + \sin^2 x^2 (dx^3)^2],$$

unde $\rho = \rho(s)$, şi $N_\alpha(x^0, x^1, x^2, x^3)$ cu $\alpha = 1, 2$, doi vectori unitari, ortogonali între ei şi fiecare ortogonal pe varietatea (1); deci

$$(2) \qquad N_1^2 = 1, \ N_1 \cdot N_2 = 0, \ N_2^2 = 1,$$

$$(3) \qquad \frac{\partial M}{\partial x^i} \cdot N_1 = 0, \quad \frac{\partial M}{\partial x^i} \cdot N_2 = 0$$

($i = 0, 1, 2, 3$). În afara relaţiilor (2), vectorii N_1, N_2 sînt arbitrari. Alegem o pereche de vectori normali care satisface în plus condiţiei

$$(4) \qquad N_1 \cdot \mathrm{d}N_2 = 0$$

deci şi

$$(5) \qquad N_2 \cdot \mathrm{d}N_1 = 0.$$

Scriem relaţiile Gauss şi Weingarten

$$(6) \qquad \frac{\partial N_\alpha}{\partial x^i} = A_{\alpha ij} \frac{\partial M}{\partial x^j},$$

$$(7) \qquad \frac{\partial^2 M}{\partial x^i \partial x^j} = B_{ijk} \frac{\partial M}{\partial x^k} + B_{ij\alpha} N_\alpha$$

cu

$$(8) \qquad B_{ij\alpha} = - g_{ih} A_{\alpha jh}$$

($i, j, k = 0, 1, 2, 3$; $\alpha = 1, 2$). În formulele (6) am ţinut seama, conform relaţiilor (4), (5), că

$$(9) \qquad A_{\alpha i\beta} = 0.$$

b) Trecem la spaţiul euclidian E_6 cu formulele

$$(10) \qquad M'(x^0, x^1, x^2, x^3, u^1, u^2) = M(x^0, x^1, x^2, x^3) + u^1 N_1 + u^2 N_2.$$

Avem deci metrica euclidiană

$$(11) \qquad \mathrm{d}M'^2 = \mathrm{d}s^2 + 2u^\alpha \mathrm{d}M \cdot \mathrm{d}N_\alpha + u^\alpha u^\beta \mathrm{d}N_\alpha \cdot \mathrm{d}N_\beta + (\mathrm{d}u^1)^2 + (\mathrm{d}u^2)^2.$$

Rezultă că *torsiunea este nulă*; am numit torsiune tensorul de componente $\psi_{\alpha\beta} = N_\alpha \cdot \mathrm{d}N_\beta = A_{\alpha\beta i}\mathrm{d}x^i$, deci

$$(12) \qquad A_{\alpha\beta i} = 0.$$

În (11) considerăm formele

$$(13) \qquad \varphi_\alpha = \mathrm{d}M \cdot \mathrm{d}N_\alpha = - B_{ij\alpha}\mathrm{d}x^i \mathrm{d}x^j,$$

$$(14) \qquad \varphi_{\alpha\beta} = \mathrm{d}N_\alpha \cdot \mathrm{d}N_\beta = C_{\alpha\beta ij}\mathrm{d}x^i \mathrm{d}x^j$$

cu

$$(15) \qquad C_{\alpha\beta ij} = - A_{\beta jl} B_{il\alpha}$$

($i, j, l = 0, 1, 2, 3$; $\alpha, \beta = 1, 2$).

Formulele de scufundare Gauss, Codazzi şi Ricci—Kühne devin

$$(16) \qquad R^i_{jkl} + A_{\alpha li} B_{jk} - A_{\alpha ki} B_{jl\alpha} = 0,$$

$$(17) \qquad B_{ij\alpha, k} - B_{ik\alpha, j} = 0,$$

$$(18) \qquad C_{\alpha\beta ij} - C_{\alpha\beta ji} = 0.$$

6. Indicaţii bibliografice. Pentru scufundarea spaţiilor relativiste să se consulte:

Fujitani, T. Ikeda, M. Matsumoto M. *On the imbedding of the Schwarzschild space — time.* Journal of Math. Kyoto University, 1961, I, 1. p. 43—61.

Vrănceanu G. Teleman, C. *Geometrie euclidiană, geometrii neeuclidiene, teoria relativităţii.* Ed. II. Bucureşti, Editura tehnică, 1967.

Ianuş S., *Scufundarea metricii Reissner— Weyl.* Comunicările Academiei, **13**, 10, 1963, pp. 857—862.

Smaranda D., *Immersion d'un modéle d'univers avec champs magnétique dans un espace pseudo-euclidien.* Bull. Soc. Sc. Liège, 1967, nr. 3—4.

Mihăileanu N., *Sur les métriques relativistes à symétrie sphérique.* Analele Univ. Bucureşti, vol. **21**, 1, 1972, pp. 47—48.

E. TEORIA UNITARĂ NEOLONOMĂ

1. Ecuaţiile Maxwell într-un sistem de congruenţe. a) Într-un sistem de congruenţe, date prin diferenţialele $\mathrm{d}s^a$ ale arcelor neolonome, coeficienţii w^a_{bc} ai covarianţilor bilineari

$$(1) \qquad \Delta s^a = w^a_{bc} \mathrm{d}s^b \delta s^c$$

satisfac identităţilor fundamentale, pe care putem să le scriem tensorial sub forma

$$(2) \qquad w_{ij,k} + w_{jk,i} + w_{ki,j} = 0$$

într-un spaţiu riemannian, fără torsiune. Punem

$$(3) \qquad e_1 = w_{10}, \quad e_2 = w_{20}, \quad e_3 = w_{30}.$$

$$(4) \qquad h_1 = w_{23}, \quad h_2 = w_{31}, \quad h_3 = w_{12},$$

e_i, h_i fiind proiecţiile pe congruenţele 1, 2, 3 ale tensorului electric, respectiv magnetic.

b) Într-un sistem de coordonate, ecuaţiile Maxwell sînt [v. (4) din II.B]

$$\text{div}\,\overline{H} = 0, \quad \text{rot}\,\overline{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \overline{H}}{\partial t}, \tag{5}$$

$$\text{div}\,\overline{E} = 0, \quad \text{rot}\,\overline{H} = \frac{1}{c}\frac{\partial \overline{E}}{\partial t} \tag{6}$$

în absenţa sarcinii electrice ($\rho = 0$). Putem să scriem primul rînd de ecuaţii Maxwell sub forma tensorială [(7) din I.B.4)]

$$\frac{\partial F_{ij}}{\partial x^k} + \frac{\partial F_{jk}}{\partial x^i} + \frac{\partial F_{ki}}{\partial x^j} = 0 \tag{7}$$

sau, deoarece conexiunea spaţiului pseudoeuclidian este nulă,

$$F_{ij,\,k} + F_{jk,\,i} + F_{ki,\,j} = 0. \tag{8}$$

Într-un sistem de congruenţe în care f_{ij} este proiecţia tensorului F_{ij}, avem

$$f_{ij,\,k} + f_{jk,\,i} + f_{ki,\,j} = 0, \tag{9}$$

care sînt chiar ecuaţiile (2).

c) Al doilea rînd de ecuaţii Maxwell rezultă din (5) prin înlocuirile $E \to H$, $H \to -E$, deci avem o situaţie analoagă.

Dealtfel, trecînd la componentele mixte f_j^i ale tensorului f_{ij}, conform metricii

$$\mathrm{d}s^2 = -(\mathrm{d}x^0)^2 + (\mathrm{d}x^1)^2 + (\mathrm{d}x^2)^2 + (\mathrm{d}x^3)^2,$$

al doilea rînd de ecuaţii Maxwell sub formă tensorială în sistemul de congruenţe devine

$$\frac{\partial f_j^i}{\partial x^i} = 0,$$

exprimînd că divergenţa tensorului $f_j^i = 0$ este nulă, adică teorema conservării energiei.

Deci *ecuaţiile Maxwell sînt echivalente cu identităţile fundamentale într-un sistem de congruenţe.*

2. Spaţiu relativist neolonom. a) Considerăm un spaţiu V_4 de metrică

$$g_{ij}\mathrm{d}x^i\mathrm{d}x^j = -(\mathrm{d}s^0)^2 + (\mathrm{d}s^1)^2 + (\mathrm{d}s^2)^2 + (\mathrm{d}s^3)^2 \tag{1}$$

raportat la un sistem de congruenţe

$$\mathrm{d}s^a = \lambda_i^a \mathrm{d}x^i, \quad \mathrm{d}x^i = \mu_a^i \mathrm{d}s^a \quad (i,\ a, \ldots = 0,\ 1,\ 2,\ 3), \tag{2}$$

Presupunem că spaţiul V_4 este scufundat într-un spaţiu V_5, de metrică

$$\mathrm{d}s^2 = g_{ij}\mathrm{d}x^i\mathrm{d}x^j + (\mathrm{d}s^4)^2, \tag{3}$$

unde

$$\mathrm{d}s^4 = \mathrm{d}x^4 + \varphi_i \mathrm{d}x^i, \tag{4}$$

φ_i fiind funcţii de x^0, x^1, x^2, x^3; presupunem că $\varphi_i\, \mathrm{d}x^i$ nu este diferenţială totală exactă, deci s^4 este o variabilă neolonomă.

Spaţiul (1) este astfel un spaţiu $\mathrm{d}s^4 = 0$ din V_5, adică un spaţiu neolonom V_5^4, mai precis o ipersuprafaţă în V_5. *Grupul rigid* al acestui spaţiu neolonom este

$$\mathrm{d}\overline{s}^a = c_b^a \mathrm{d}s^b, \quad \mathrm{d}\overline{s}^4 = \mathrm{d}s^4, \tag{5}$$

unde c_b^a, de determinant diferit de zero, $|c_b^a| \neq 0$, satisfac condiţiilor de pseudoortogonalitate

$$\varepsilon_{ab} c_c^a c_d^b = \varepsilon_{cd}, \tag{6}$$

unde, conform metricii (1),

$$\varepsilon_{ab} = 0\ (a \neq b), \quad \varepsilon_{aa} = \varepsilon_a = \begin{cases} -1, & a = 0, \\ 1, & a = 1,\ 2,\ 3. \end{cases} \tag{7}$$

b) Calculăm covarianţii bilineari ai formelor $\mathrm{d}s^\alpha (\alpha = 0, 1, 2, 3, 4)$. Avem în primul rînd, pentru formele $\mathrm{d}s^0$, $\mathrm{d}s^1$, $\mathrm{d}s^2$, $\mathrm{d}s^3$,

$$\Delta s^a = w_{bc}^a \mathrm{d}s^b \delta s^c = w_{bc}^a \lambda_i^b \lambda_j^c \mathrm{d}x^i \delta x^j. \tag{8}$$

Apoi

$$\Delta s^4 = \delta \mathrm{d}s^4 - \mathrm{d}\delta s^4 = \Delta x^4 + \varphi_{ij}\mathrm{d}x^i \delta x^j, \tag{9}$$

unde

$$\varphi_{ij} = \frac{\partial \varphi_i}{\partial x^j} - \frac{\partial \varphi_j}{\partial x^i}. \tag{10}$$

Notînd $\Delta s^4 = w_{bc}^4 \lambda_i^b \lambda_j^c\, \mathrm{d}x^i \delta x^j$, rezultă

$$w_{a4}^4 = 0, \quad w_{ab}^4 = \varphi_{ij}\mu_a^i \mu_b^j \tag{11}$$

şi din (8),

$$w_{b4}^a = 0. \tag{12}$$

Calculăm acum coeficienții Ricci, $\gamma^{\alpha}_{\beta\gamma}$, față de congruențele din V_5, conform formulei

$$(13) \qquad \varepsilon_a \gamma^a_{bc} = \frac{1}{2}(\varepsilon_a w^a_{bc} + \varepsilon_b w^b_c + \varepsilon_c w^c_{ba}),$$

care determină coeficienții pentru $a, b, c, \ldots = 0.\ 1, 2, 3$, iar pentru indici 4, conform cu (11). (12)

$$(14) \qquad \gamma^4_{a4} = 0, \quad \gamma^4_{4a} = 0, \quad \gamma^{\alpha}_{44} = 0,$$

$$(15) \qquad \gamma^a_{4b} = \gamma^a_{b4} = \frac{1}{2}\varepsilon_a w^4_{ba}, \; \gamma^4_{ab} = \frac{1}{2} w^4_{ab}.$$

c) Coeficienții Ricci γ^a_{bc} sînt coeficienții conexiunii spațiului V_4, de metrică (1). Pentru spațiul V^4_5, coeficienții Ricci $\gamma^{\alpha}_{\beta\gamma}$, calculați, corespunzători conexiunii din V_4 nu sînt și coeficienții conexiunii din V^4_5. Alegem o conexiune în V^4_5 în modul următor:

$$(16) \qquad \overset{*}{\gamma}{}^a_{bc} = \gamma^a_{bc}, \; \overset{*}{\gamma}{}^a_{b4} = \overset{*}{\gamma}{}^4_{4b} = \overset{*}{\gamma}{}^4_{ab} = \overset{*}{\gamma}{}^4_{a4} = 0.$$

Această conexiune este *rigidă*, adică invariantă în grupul rigid (5).

Calculăm acum torsiunea și curbura spațiului neolonom V^4_5. Pentru torsiune avem

$$(17) \qquad t^{\alpha}_{\beta\gamma} = \gamma^{\alpha}_{\beta\gamma} - \gamma^{\alpha}_{\gamma\beta} - w^{\alpha}_{\beta\gamma}.$$

Componentele t^a_{bc} sînt nule, spațiul (1) fiind riemannian. Singurele componente nenule ale torsiunii sînt

$$(18) \qquad t^4_{ab} = -w^4_{ab}.$$

Relativ la curbură, utilizăm formula

$$\overset{*}{\gamma}{}^{\alpha}_{\alpha\beta\delta} = \frac{\partial \overset{*}{\gamma}{}^{\alpha}_{\beta\gamma}}{\partial s^{\delta}} - \frac{\partial \overset{*}{\gamma}{}^{\alpha}_{\beta\delta}}{\partial s^{\gamma}} + \overset{*}{\gamma}{}^{\alpha}_{\lambda\gamma}\overset{*}{\gamma}{}^{\lambda}_{\beta\delta} - \overset{*}{\gamma}{}^{\alpha}_{\lambda\delta}\overset{*}{\gamma}{}^{\lambda}_{\beta\gamma} + \overset{*}{\gamma}{}^{\alpha}_{\beta\lambda} w^{\lambda}_{\gamma\delta},$$

unde $\overset{*}{\gamma}{}^{\alpha}_{\beta\gamma}$ este conexiunea atașată (16). Rezultă

$$(19) \qquad \overset{*}{\gamma}{}^{\alpha}_{bcd} = \gamma^a_{bcd},$$

iar celelalte componente sînt nule.

3. Teoria unitară. a) Curbura metricii V_4

$$(1) \qquad -(ds^0)^2 + (ds^1)^2 + (ds^2)^2 + (ds^3)^2$$

are caracter gravitațional; ea este legată de tensorul energie — impuls prin ecuațiile Einstein.

Deoarece curbura spațiului neolonom V^4_5 este egală cu aceea a spațiului V_4, și această curbură are caracter gravitațional.

b) Considerăm un vector din V_5; transportîndu-l prin paralelism în sensul metricii (1), de-a lungul unui drum din V_4, paralelogramele infinitezimale nu se închid, a cincea latură fiind normală la V_4. Dacă ds^h, δs^k sînt deplasări din V_4, cu care este construit pentagonul infinitezimal, avem pentru a cincea latură, în direcția normalei la V_4

$$(2) \qquad \Delta s^4 = w_{hk} ds^h \delta s^k,$$

$w_{hk} = w^4_{hk}$ fiind coeficienții covariantului bilinear, strîmb simetrici; ei determină torsiunea spațiului neolonom V^4_5. Avem șase componente distincte

$$(3) \qquad w_{01}, w_{02}, w_{03}, w_{12}, w_{23}, w_{31}.$$

Celelalte componente t^l_{hk} ale torsiunii sînt nule, corespunzînd spațiului V_4.

c) Punem

$$(4) \qquad w_{ij} = f_{ij}$$

f_{ij} fiind proiecțiile pe congruențe ale tensorului electromagnetic. Avem formula torsiunii

$$(5) \qquad t^l_{hk} = \gamma^l_{hk} - \gamma^l_{kh} - w^l_{hk}$$

și $t^l_{hk} = 0$ pentru $l = 0, 1, 2, 3$. Atunci, identitățile fundamentale în teoria congruențelor

$$(6) \qquad \Sigma\left(\frac{\partial w_{ij}}{\partial s^k} + w_{il} w^l_{jk}\right) = 0$$

coincid cu (2) din § 1, deci cu ecuațiile Maxwell.

Deci *ecuațiile Maxwell coincid cu identitățile fundamentale într-un sistem de congruențe ale spațiului neolonom* V^4_5. Rezultă că *proprietățile electromagnetice sînt generate de torsiunea* w_{hk} *a spațiului neolonom.*

d) Teoria relativității a reușit să explice satisfăcător, pe cale geometrică, prin ecuațiile Einstein, fenomenele gravitaționale. S-a pus atunci problema construirii unei teorii unitare, care să explice cu ajutorul proprietăților spațiului fizic, atît fenomenele gravitaționale cît și pe cele electromagnetice, adică din metrica spațiului să rezulte și ecuațiile Einstein și ecuațiile Maxwell.

O soluție a fost dată de profesorul Gheorghe Vrănceanu, în 1935, dînd o interpretare spațiului fizic ca o ipersuprafață V^4_5:

$$(7) \qquad ds^2 = dx^4 - \varphi_i dx^i = 0,$$

scufundată în V_5, conform formulelor precedente. Atunci componentele cîmpului electromagnetic sînt

$$f_{ij} = \varphi_{ij} = \frac{\partial \varphi_i}{\partial x^j} - \frac{\partial \varphi_j}{\partial x^i}. \tag{8}$$

Rezultă că tensorul de curbură generează ecuațiile Einstein și tensorul de torsiune, ecuațiile Maxwell.

4. **Indicații bibliografice.** Pentru desvoltări relativ la teoriile unitare neolonome să se consulte:

Vrănceanu G., *La théorie unitaire des champs et les hypersurfaces non holonomes*. C. R. Paris, t. 200, 1935, p. 2056–58.

Vrănceanu, G., Popovici A., *Fundamentele teoriei generale a relativității* Studii și Cerc. Mat., București, 15, 1964, pp. 285–323; 547–593.

Teodorescu, I. D., *Teoria unitară neolonomă*. Gazeta Matematică, A, 1969. pp. 105–110; 139–146.

F. MECANICĂ CUANTICĂ RELATIVISTĂ

1. Tensori spinoriali. a) Considerăm spațiul euclidian complex patrudimensional E_4^*. Fie $\{0, I_1, I_2, I_3, I_4\}$ un reper ortonormat R și x^1, x^2, x^3, x^4 coordonatele unui vector relativ la acest reper. Pătratul scalar al vectorului are forma

$$x^2 = (x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2 + (x^4)^2. \tag{1}$$

Fie două plane în spațiul patrudimensional A_2, $\hat{A}_2$ care trec prin O și alegem un reper, astfel ca doi vectori I_1, I_2 să aparțină lui A_2 iar $I_{\hat{1}}$, $I_{\hat{2}}$ lui $\hat{A}_2$. Dintr-un reper $R(I_1, I_2, I_{\hat{1}}, I_{\hat{2}})$ obținem un oricare altul prin transformarea

$$\begin{aligned} I_{1'} &= \alpha^1_{1'} I_1 + \alpha^2_{1'} I_2, \quad I_{\hat{1}'} = \alpha^{\hat{1}}_{\hat{1}'} I_{\hat{1}} + \alpha^{\hat{2}}_{\hat{1}'} I_{\hat{2}}, \\ I_{2'} &= \alpha^1_{2'} I_1 + \alpha^2_{2'} I_2, \quad I_{\hat{2}'} = \alpha^{\hat{1}}_{\hat{2}'} I_{\hat{1}} + \alpha^{\hat{2}}_{\hat{2}'} I_{\hat{2}}, \end{aligned} \tag{2}$$

deci vectorii $I_{1'}$, $I_{2'}$, rămîn în A_2 iar $I_{\hat{1}'}$, $I_{\hat{2}'}$, în $\hat{A}_2$. Notăm cu litere grecești indicii care iau valorile 1, 2. Transformările (2) devin

$$I_{\lambda'} = \alpha^{\lambda}_{\lambda'} I_{\lambda}, \quad I_{\hat{\lambda}'} = \alpha^{\hat{\lambda}}_{\hat{\lambda}'} I_{\hat{\lambda}}. \tag{3}$$

Presupunem că transformările sînt unimodulare,

$$|\alpha^{\lambda}_{\lambda'}| = \begin{vmatrix} \alpha^1_{1'} & \alpha^2_{1'} \\ \alpha^1_{2'} & \alpha^2_{2'} \end{vmatrix} = 1, \quad |\alpha^{\hat{\lambda}}_{\hat{\lambda}'}| = 1. \tag{4}$$

b) Considerăm un vector $\overline{\Psi}$ din E_4^*, ale cărui coordonate le notăm cu ψ^1, ψ^2, $\psi^{\hat{1}}$, $\psi^{\hat{2}}$

$$\overline{\Psi} = \psi^1 I_1 + \psi^2 I_2 + \psi^{\hat{1}} I_{\hat{1}} + \psi^{\hat{2}} I_{\hat{2}}. \tag{5}$$

Într-o transformare (3), ψ^1, ψ^2 se transformă în $\psi^{1'}$, $\psi^{2'}$ și $\psi^{\hat{1}}$, $\psi^{\hat{2}}$ în $\psi^{\hat{1}'}$, $\psi^{\hat{2}'}$:

$$\psi^{\lambda'} = \alpha^{\lambda'}_{\lambda} \psi^{\lambda}, \quad \psi^{\hat{\lambda}'} = \alpha^{\hat{\lambda}'}_{\hat{\lambda}} \psi^{\hat{\lambda}}, \tag{6}$$

unde $\alpha^{\lambda'}_{\lambda}$, $\alpha^{\hat{\lambda}'}_{\hat{\lambda}}$ sînt minorii normați ai elementelor $\alpha^{\lambda}_{\lambda'}$, $\alpha^{\hat{\lambda}}_{\hat{\lambda}'}$; deci

$$\alpha^{\lambda}_{\mu'} \alpha^{\mu'}_{\nu} = \delta^{\lambda}_{\nu}, \quad \alpha^{\hat{\lambda}}_{\hat{\mu}'} \alpha^{\hat{\mu}'}_{\hat{\nu}} = \delta^{\hat{\lambda}}_{\hat{\nu}}. \tag{7}$$

Matricea transformării (6) este deci

$$(\alpha^{\lambda'}_{\lambda}) = \begin{pmatrix} \alpha^{1'}_1 & \alpha^{1'}_2 \\ \alpha^{2'}_1 & \alpha^{2'}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha^2_{2'} & -\alpha^1_{2'} \\ -\alpha^2_{1'} & \alpha^1_{1'} \end{pmatrix}. \tag{8}$$

Numim *spinor*, tensorul format din coordonatele contravariante ale vectorului $\overline{\Psi}(\psi^{\lambda}, \psi^{\hat{\lambda}})$.

Din coordonatele contravariante ale unui spinor, le obținem pe cele covariante, prin

$$\psi_1, \ \psi_2, \ \psi_{\hat{1}}, \ \psi_{\hat{2}} = \psi^2, -\psi^1, \psi^{\hat{2}}, -\psi^{\hat{1}}. \tag{9}$$

În adevăr, cînd $(\psi^{\lambda}, \psi^{\hat{\lambda}})$ se transformă după (6), ψ_{λ}, $\psi_{\hat{\lambda}}$ devin

$$\psi_{\lambda'} = \alpha^{\lambda}_{\lambda'} \psi_{\lambda}, \quad \psi_{\hat{\lambda}'} = \alpha^{\hat{\lambda}}_{\hat{\lambda}'} \psi_{\hat{\lambda}}, \tag{10}$$

iar relațiile $\psi_1 = \psi^2$ etc. au caracter invariant; detaliat

$$\psi^{2'} = \alpha^{2'}_{\lambda} \psi^{\lambda} = \alpha^{2'}_1 \psi^1 + \alpha^{2'}_2 \psi^2 = \alpha^2_{1'} \psi_2 + \alpha^1_{1'} \psi_1 = \alpha^{\lambda}_{1'} \psi_{\lambda} = \psi_{1'} \quad \text{etc.}$$

c) Un spinor de două ori contravariant are coordonatele de forma

$$\psi^{\lambda\mu}, \ \psi^{\hat{\lambda}\mu}, \ \psi^{\lambda\hat{\mu}}, \ \psi^{\hat{\lambda}\hat{\mu}}$$

astfel că într-o transformare (6)

$$\psi^{\lambda'\mu'} = \alpha^{\lambda'}_{\lambda} \alpha^{\mu'}_{\mu} \psi^{\lambda\mu}, \quad \psi^{\hat{\lambda}'\mu'} = \alpha^{\hat{\lambda}'}_{\hat{\lambda}} \alpha^{\mu'}_{\mu} \psi^{\hat{\lambda}\mu} \quad \text{etc.} \tag{11}$$

Considerăm spinorii cu proprietățile

$$\text{(12)} \qquad \varepsilon^{\lambda\mu} = -\varepsilon^{\mu\lambda}, \quad \varepsilon^{\hat{\lambda}\hat{\mu}} = -\varepsilon^{\hat{\mu}\hat{\lambda}}, \quad \varepsilon^{\lambda\hat{\mu}} = \varepsilon^{\hat{\lambda}\mu} = 0.$$

Aceste proprietăți au caracter invariant; în adevăr

$$\varepsilon^{\lambda'\mu'} = \alpha_{\lambda}^{\lambda'} \alpha_{\mu}^{\mu'} \varepsilon^{\lambda\mu} = -\alpha_{\lambda}^{\lambda'} \alpha_{\mu}^{\mu'} \varepsilon^{\mu\lambda} = -\varepsilon^{\mu'\lambda'},$$

$$\varepsilon^{\lambda'\hat{\mu}'} = \alpha_{\lambda}^{\lambda'} \alpha_{\mu}^{\hat{\mu}'} \varepsilon^{\lambda\hat{\mu}} = 0.$$

În particular $\varepsilon^{11} = \varepsilon^{22} = \varepsilon^{\hat{1}\hat{1}} = \varepsilon^{\hat{2}\hat{2}} = 0$ iar ε^{12}, $\varepsilon^{\hat{1}\hat{2}}$ *sînt invarianți.* În adevăr

$$\varepsilon^{1'2'} = \alpha_{\lambda}^{1'} \alpha_{\mu}^{2'} \varepsilon^{\lambda\mu} = \alpha_1^{1'} \alpha_2^{2'} \varepsilon^{12} + \alpha_2^{1'} \alpha_1^{2'} \varepsilon^{21} = \varepsilon^{12}(\alpha_1^{1'} \alpha_1^{2'} - \alpha_2^{1'} \alpha_1^{2'}) = \varepsilon^{12};$$

analog pentru $\varepsilon^{\hat{1}\hat{2}}$.

Considerăm spinorii pentru care toate componentele sînt nule afară de

$$\text{(13)} \qquad \varepsilon^{12} = -\varepsilon^{21} = 1, \quad \varepsilon^{\hat{1}\hat{2}} = -\varepsilon^{\hat{2}\hat{1}} = 1$$

relativ la orice reper.

Analog considerăm un spinor de două ori covariant, pentru care

$$\text{(14)} \qquad \varepsilon_{12} = -\varepsilon_{21} = 1, \quad \varepsilon_{\hat{1}\hat{2}} = -\varepsilon_{21} = 1.$$

Atunci putem să scriem corespondența (9) sub forma

$$\text{(15)} \qquad \begin{aligned} &\psi_{\lambda} = \varepsilon_{\lambda\mu} \psi^{\mu}, \quad \psi_{\hat{\lambda}} = \varepsilon_{\hat{\lambda}\hat{\mu}} \psi^{\hat{\mu}}, \\ &\psi^{\lambda} = -\varepsilon^{\lambda\mu} \psi_{\mu}, \quad \psi^{\hat{\lambda}} = -\varepsilon^{\hat{\lambda}\hat{\mu}} \psi_{\hat{\mu}}. \end{aligned}$$

Deci cu ajutorul spinorilor ε putem să ridicăm ori să coborîm indicii.

d) Considerăm spinorul

$$\text{(16)} \qquad c^{\lambda\mu} = c^{\hat{\lambda}\hat{\mu}} = 0, \quad c^{\lambda\hat{\mu}} = c^{\hat{\mu}\lambda}.$$

Proprietatea de definiție are caracter invariant; în adevăr

$$c^{\lambda'\mu'} = \alpha_{\lambda}^{\lambda'} \alpha_{\mu}^{\mu'} c^{\lambda\mu} = 0,$$

$$c^{\lambda'\hat{\mu}'} = \alpha_{\lambda}^{\lambda'} \alpha_{\hat{\mu}}^{\hat{\mu}'} c^{\lambda\hat{\mu}} = \alpha_{\lambda}^{\lambda'} \alpha_{\hat{\mu}}^{\hat{\mu}'} c^{\hat{\mu}\lambda} = c^{\hat{\mu}'\lambda'}.$$

Spinorul $c^{\lambda\mu}$ este simetric. Matricea lui este

$$\text{(17)} \qquad \left(\begin{array}{cc|cc} \multicolumn{2}{c|}{\multirow{2}{*}{0}} & c^{1\hat{1}} & c^{1\hat{2}} \\ & & c^{2\hat{1}} & c^{2\hat{2}} \\ \hline c^{\hat{1}1} & c^{\hat{1}2} & \multicolumn{2}{c}{\multirow{2}{*}{0}} \\ c^{\hat{2}1} & c^{\hat{2}2} & & \end{array}\right),$$

$c^{\lambda\mu}$ este o clasă de tensori. Este suficient să considerăm matricea superioară de ordinul al doilea; conform cu (16), obținem matricea inferioară prin transpunere. Din legea de transformare rezultă

$$\text{(18)} \qquad |c^{\lambda'\hat{\mu}'}| = |c^{\lambda\hat{\mu}}|.$$

Avem deci invariantul

$$\text{(19)} \qquad I = |c^{\lambda\hat{\mu}}| = c^{1\hat{1}} c^{2\hat{2}} - c^{1\hat{2}} c^{2\hat{1}}.$$

e) Unui spinor $c^{\lambda\hat{\mu}}$, construit prin (16), îi atașăm un vector (x^1, x^2, x^3, x^4) prin

$$\text{(20)} \qquad \begin{pmatrix} c^{1\hat{1}} & c^{1\hat{2}} \\ c^{2\hat{1}} & c^{2\hat{2}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^3 + \mathrm{i}x^4 & x^1 + \mathrm{i}x^2 \\ x^1 - \mathrm{i}x^2 & -x^3 + \mathrm{i}x^4 \end{pmatrix}.$$

Numerele x^i sînt complexe. Rezultă

$$\text{(21)} \qquad \begin{aligned} &x^1 = \frac{1}{2}(c^{1\hat{2}} + c^{2\hat{1}}), \quad x^2 = \frac{1}{2\mathrm{i}}(c^{1\hat{2}} - c^{2\hat{1}}), \\ &x^3 = \frac{1}{2}(c^{1\hat{1}} - c^{2\hat{2}}), \quad x^4 = \frac{1}{2\mathrm{i}}(c^{1\hat{1}} + c^{2\hat{2}}). \end{aligned}$$

Invariantul (19) devine

$$I = \begin{vmatrix} c^{1\hat{1}} & c^{1\hat{2}} \\ c^{2\hat{1}} & c^{2\hat{2}} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x^3 + \mathrm{i}x^4 & x^1 + \mathrm{i}x^2 \\ x^1 - \mathrm{i}x^1 & -x^3 + \mathrm{i}x^4 \end{vmatrix},$$

deci

$$\text{(22)} \qquad I = -[(x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2 + (x^4)^2].$$

Rezultă că vectorul x^i suferă o transformare ortogonală complexă în E_4^*.

2. Spinori în spațiul pseudoeuclidian. a) Trecem de la reperul ortonormat $R(0, I_1, I_2, I_3, I_4)$ din E_4^* la reperul ortogonal din spațiul pseudoeuclidian patrudimensional de indice 1, E_4^1, luînd

(1) $$I_0 = \mathrm{i}I_4$$

și restul vectorilor de bază rămînînd neschimbați. Coordonatele x^0, x^1, x^2, x^3 sînt reale, dar relativ la reperul R au forma

(2) $$x^1 = x^1,\quad x^2 = x^2,\quad x^3 = x^3,\quad x^4 = \mathrm{i}x^0.$$

Considerăm și în acest spațiu, spinorii și spintensorii din E_4^*.

Fie x^i un vector arbitrar din E_4^1. Îi asociem un tensor spinorial $c^{\lambda\hat{\mu}}$, conform cu (1.20); deci

(3) $$\begin{pmatrix} c^{1\hat{1}} & c^{1\hat{2}} \\ c^{2\hat{1}} & c^{2\hat{2}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^3 - x^0 & x^1 + \mathrm{i}x^2 \\ x^1 - \mathrm{i}x^2 & -x^3 - x^0 \end{pmatrix}.$$

În acest caz matricea (3) este ermitiană, adică transpunînd, elementele ei se schimbă în complex în conjugatele lor. Reciproc, dacă matricea $(c^{\lambda\hat{\mu}})$ este ermitiană, din (1.20) rezultă că $x^1 + \mathrm{i}x^2$, $x^1 - \mathrm{i}x^2$ sînt conjugate, deci x^1, x^2 reali; $x^3 + \mathrm{i}x^4$, $x^3 - \mathrm{i}x^4$ sînt reali, deci x^3 este real și x^4 pur complex (deci x^0 real).

b) Considerăm transformările spintensoriale de forma (1.3). Cercetăm condiția ca să se mențină caracterul ermitian al matricei $(c^{\lambda\hat{\mu}})$. Avem prin definiție

(4) $$c^{\lambda\hat{\mu}} = (c^{\mu\hat{\lambda}})^*,$$

notînd conjugarea complexă prin asterisc. Avem

$$c^{\lambda'\hat{\mu}'} = \alpha_{\lambda}^{\lambda'}\alpha_{\hat{\mu}}^{\hat{\mu}'}c^{\lambda\hat{\mu}},$$

$$c^{\mu'\hat{\lambda}'} = (c^{\lambda'\hat{\mu}'})^* = (\alpha_{\lambda}^{\lambda'})^*(\alpha_{\hat{\mu}}^{\hat{\mu}'})^*(c^{\lambda\hat{\mu}})^* = (\alpha_{\lambda}^{\lambda'})^*(\alpha_{\hat{\mu}}^{\hat{\mu}'})^*c^{\mu\hat{\lambda}}.$$

Pe de altă parte

$$c^{\mu'\hat{\lambda}'} = \alpha_{\mu}^{\mu'}\alpha_{\hat{\lambda}}^{\hat{\lambda}'}c^{\mu\hat{\lambda}},$$

deci trebuie să avem

$$\alpha_{\mu}^{\mu'}\alpha_{\hat{\lambda}}^{\hat{\lambda}'} = (\alpha_{\lambda}^{\lambda'})^*(\alpha_{\hat{\mu}}^{\hat{\mu}'})^*.$$

Este suficient să fie satisfăcută această condiție, dacă

(5) $$\alpha_{\hat{\lambda}}^{\hat{\lambda}'} = (\alpha_{\lambda}^{\lambda'})^*$$

sau

(6) $$\alpha_{\hat{\lambda}}^{\hat{\lambda}'} = -(\alpha_{\lambda}^{\lambda'})^*,$$

adică dacă luăm matricea $(\alpha_{\lambda}^{\lambda'})$ arbitrară iar drept $(\alpha_{\hat{\lambda}}^{\hat{\lambda}'})$ matricea ei complex conjugată ori cu semn schimbat.

3. Ecuațiile Dirac. a) Fie dat un cîmp spinorial în E_4^1, adică

(1) $$\psi_{\lambda} = \psi_{\lambda}(x^0, x^1, x^2, x^3),\quad \psi_{\hat{\lambda}} = \psi_{\hat{\lambda}}(x^0, x^1, x^2, x^3)$$

($\lambda = 1, 2$, $\hat{\lambda} = \hat{1}, \hat{2}$). Fiecărui vector x^i în E_4^1 îi corespunde un spinor determinat $c^{\lambda\hat{\mu}}$, $c^{\hat{\mu}\lambda}$ (2.3). În coordonate covariante

$$x_0 = -x^0,\quad x_1 = x^1,\quad x_2 = x^2,\quad x_3 = x^3$$

avem

(2) $$\begin{pmatrix} c^{1\hat{1}} & c^{1\hat{2}} \\ c^{2\hat{1}} & c^{2\hat{2}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_3 + x_0 & x_1 + \mathrm{i}x_2 \\ x_1 - \mathrm{i}x_2 & -x_3 + x_0 \end{pmatrix}.$$

Considerăm mulțimea operatorilor

(3) $$\frac{\partial}{\partial x^0}, \frac{\partial}{\partial x^1}, \frac{\partial}{\partial x^2}, \frac{\partial}{\partial x^3}$$

pe care putem să-i aplicăm cîmpului tensorial. La o schimbare de reper sînt vectori covarianți:

(4) $$\frac{\partial}{\partial x'^i} = \frac{\partial x^j}{\partial x'^i}\frac{\partial}{\partial x^j}.$$

Înlocuim în (2) coordonatele covariante x_i prin coordonatele operatorului covariant $\frac{\partial}{\partial x^i}$; obținem un tensor spinorial

(5) $$\begin{pmatrix} D^{1\hat{1}} & D^{1\hat{2}} \\ D^{2\hat{1}} & D^{2\hat{2}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x^3} + \frac{\partial}{\partial x^0} & \frac{\partial}{\partial x^1} + \frac{\partial}{\partial x^2} \\ \frac{\partial}{\partial x^1} - \mathrm{i}\frac{\partial}{\partial x^2} & -\frac{\partial}{\partial x^3} + \frac{\partial}{\partial x^0} \end{pmatrix},$$

iar

$$D^{\lambda\mu} = D^{\hat{\lambda}\hat{\mu}} = 0, \quad D^{\lambda\hat{\mu}} = D^{\hat{\mu}\lambda} \tag{6}$$

ca pentru $(c^{\lambda\mu})$.

Spunem că D este operatorul lui P a u l D i r a c .

b) Contractînd un spinor tensorial arbitrar $c^{\lambda\hat{\mu}}$ cu un spinor arbitrar ψ_λ, $\psi_{\hat{\lambda}}$, obținem din nou un spinor contravariant

$$\tilde{\psi}^{\lambda} = c^{\lambda\hat{\mu}}\psi_{\hat{\mu}'} \quad \psi^{\hat{\lambda}} = c^{\hat{\lambda}\mu}\psi_{\mu}, \tag{7}$$

deci și

$$\tilde{\psi}^{\lambda} = D^{\lambda\hat{\mu}}\psi_{\hat{\mu}}, \quad \tilde{\psi}^{\hat{\lambda}} = D^{\hat{\lambda}\mu}\psi_{\mu}; \tag{8}$$

prin $D^{\hat{\lambda}\mu}\psi_\mu$ înțelegem că operatorul $D^{\hat{\lambda}\mu}$ este aplicat lui ψ_λ ; deoarece $D^{\hat{\lambda}\mu} = D^{\mu\hat{\lambda}}$ relația (8) are caracter tensorial. Detaliat

$$\begin{aligned}
\tilde{\psi}^{1} &= D^{1\hat{1}}\psi_{\hat{1}} + D^{1\hat{2}}\psi_{\hat{2}} = \frac{\partial\psi_{\hat{1}}}{\partial x^0} + \frac{\partial\psi_{\hat{2}}}{\partial x^1} + i\frac{\partial\psi_{\hat{2}}}{\partial x^2} + \frac{\partial\psi_{\hat{1}}}{\partial x^3}, \\
\tilde{\psi}^{2} &= D^{2\hat{1}}\psi_{\hat{1}} + D^{2\hat{2}}\psi_{\hat{2}} = \frac{\partial\psi_{\hat{2}}}{\partial x^0} + \frac{\partial\psi_{\hat{1}}}{\partial x^1} - i\frac{\partial\psi_{\hat{1}}}{\partial x^2} - \frac{\partial\psi_{\hat{2}}}{\partial x^3}, \\
\tilde{\psi}^{\hat{1}} &= D^{1\hat{1}}\psi_{1} + D^{2\hat{1}}\psi_{2} = \frac{\partial\psi_{1}}{\partial x^0} + \frac{\partial\psi_{2}}{\partial x^1} - i\frac{\partial\psi_{2}}{\partial x^2} + \frac{\partial\psi_{1}}{\partial x^3}, \\
\tilde{\psi}^{\hat{2}} &= D^{1\hat{2}}\psi_{1} + D^{2\hat{2}}\psi_{2} = \frac{\partial\psi_{2}}{\partial x^0} + \frac{\partial\psi_{1}}{\partial x^1} + i\frac{\partial\psi_{1}}{\partial x^2} - \frac{\partial\psi_{2}}{\partial x^3}.
\end{aligned} \tag{9}$$

Astfel, dintr-un cîmp vectorial ψ_λ, $\psi_{\hat{\lambda}}$ obținem în mod invariant un nou cîmp vectorial $\tilde{\psi}^\lambda$, $\psi^{\hat{\lambda}}$.

c) În mecanica cuantică relativistă, schimbarea stării electronului, în cursul timpului este dată de un cîmp spinorial (1) în spațiul evenimentelor $(x^0, x^1, x^2, x^3) = (ct, x, y, z)$. Legea de schimbare a componentelor electronului se exprimă printr-un sistem de ecuații diferențiale, invariant la o transformare Lorentz.

După Paul Dirac (1928) aceste ecuații sînt :

$$m_0 c\psi^{\lambda} = \hbar\tilde{\psi}^{\lambda} = \hbar D^{\lambda\hat{\mu}}\psi_{\hat{\mu}}, \quad m_0 c\psi^{\hat{\lambda}} = \hbar\tilde{\psi}^{\hat{\lambda}} = \hbar D^{\hat{\lambda}\mu}\psi_{\mu}, \tag{10}$$

unde m_0 este masa electronului în repaus, c viteza luminii, $\hbar = \frac{h}{2\pi}$ (h fiind constanta lui P l a n k, $h = 6{,}6249 \cdot 10^{-27}$ erg.s), ψ^λ, $\psi^{\hat{\lambda}}$ sînt componentele contravariante ale aceluiași spinor ψ_λ, $\psi_{\hat{\lambda}}$, $D^{\lambda\hat{\mu}}$, $D^{\hat{\mu}\lambda}$ operatorul Dirac.

Deoarece $\psi_1, \psi_2, \psi_{\hat{1}}, \psi_{\hat{2}} = \psi^2, -\psi^1, \psi^{\hat{2}}, -\psi^{\hat{1}}$, scriem detaliat ecuațiile ondulatorii ale lui Dirac pentru electronul liber

$$\begin{aligned}
-m_0 c\psi_2 &= \hbar\left(\frac{\partial\psi_{\hat{1}}}{\partial x^0} + \frac{\partial\psi_{\hat{2}}}{\partial x^1} + i\frac{\partial\psi_{\hat{2}}}{\partial x^2} + \frac{\partial\psi_{\hat{1}}}{\partial x^3}\right), \\
m_0 c\psi_1 &= \hbar\left(\frac{\partial\psi_{\hat{2}}}{\partial x^0} + \frac{\partial\psi_{\hat{1}}}{\partial x^1} - i\frac{\partial\psi_{\hat{1}}}{\partial x^2} - \frac{\partial\psi_{\hat{2}}}{\partial x^3}\right), \\
-m_0 c\psi_{\hat{2}} &= \hbar\left(\frac{\partial\psi_{1}}{\partial x^0} + \frac{\partial\psi_{2}}{\partial x^1} - i\frac{\partial\psi_{2}}{\partial x^2} + \frac{\partial\psi_{1}}{\partial x^3}\right), \\
m_0 c\psi_{\hat{1}} &= \hbar\left(\frac{\partial\psi_{2}}{\partial x^0} + \frac{\partial\psi_{1}}{\partial x^1} + i\frac{\partial\psi_{1}}{\partial x^2} - \frac{\partial\psi_{2}}{\partial x^3}\right).
\end{aligned} \tag{11}$$

Din ecuațiile (11) putem să exprimăm derivatele parțiale în raport cu timpul, $\frac{\partial\psi_\lambda}{\partial t}$, $\frac{\partial\psi_{\hat{\lambda}}}{\partial t}$ prin ψ_λ, $\psi_{\hat{\lambda}}$ și derivatele lor parțiale în raport cu $x = x^1$, $y = x^2$, $z = x^3$. Obținem

$$\hbar\frac{\partial\psi_{\hat{1}}}{\partial t} = -\hbar c\left(\frac{\partial\psi_{\hat{2}}}{\partial x^1} + i\frac{\partial\psi_{\hat{2}}}{\partial x^2} + \frac{\partial\psi_{\hat{1}}}{\partial x^1}\right) - m_0 c^2\psi_2 \tag{12}$$

etc. Integrînd sistemul Dirac, putem să obținem componentele electronului în orice timp.

d) Cîmpului spinorial al electronului îi asociem un cîmp vectorial al densității curentului. Fiecărui spinor ψ^λ, $\psi^{\hat{\lambda}}$ îi asociem un spinor conjugat $\tilde{\psi}^\lambda$, $\tilde{\psi}^{\hat{\lambda}}$ conform cu

$$\tilde{\psi}^{\lambda} = (\psi^{\hat{\lambda}})^*, \quad \tilde{\psi}^{\hat{\lambda}} = (\psi^{\lambda})^*. \tag{13}$$

Operația are caracter invariant.

Din spinorul dat ψ^{λ}, $\psi^{\hat{\lambda}}$ și conjugatul lui, $\tilde{\psi}^{\hat{\lambda}}$, $\tilde{\psi}^{\hat{\lambda}}$ formăm spintensorul $c^{\lambda\hat{\mu}} = c^{\hat{\mu}\lambda}$ după formula

$$c^{\lambda\hat{\mu}} = \psi^{\lambda}\tilde{\psi}^{\mu} + \tilde{\psi}^{\lambda}\psi^{\hat{\mu}}. \tag{14}$$

Cu $x^4 = \mathrm{i}x^0$, $c^{\lambda\hat{\mu}}$ date de (14) iar $\tilde{\psi}^{\lambda}$, $\tilde{\psi}^{\hat{\lambda}}$ date de (13) avem

$$(15)\quad \begin{aligned}
x^0 &= -\frac{1}{2}(c^{1\hat{1}} + c^{2\hat{2}}) = -\frac{1}{2}\{\psi^1(\psi^{\hat{1}})^* + \psi^{\hat{1}}(\psi^1)^* + \psi^2(\psi^{\hat{2}})^* + \psi^{\hat{2}}(\psi^2)^*\},\\
x^1 &= \frac{1}{2}(c^{1\hat{2}} + c^{2\hat{1}}) = -\frac{1}{2}\{-\psi^1(\psi^2)^* - \psi^{\hat{2}}(\psi^{\hat{1}})^* - \psi^2(\psi^1)^* - \psi^{\hat{1}}(\psi^{\hat{2}})^*\},\\
x^2 &= \frac{1}{2\mathrm{i}}(c^{1\hat{2}} - c^{2\hat{1}}) = -\frac{\mathrm{i}}{2}\{\psi^1(\psi^2)^* + \psi^{\hat{2}}(\psi^{\hat{1}})^* - \psi^2(\psi^1)^* - \psi^{\hat{1}}(\psi^{\hat{2}})^*\},\\
x^3 &= \frac{1}{2}(c^{1\hat{1}} - c^{2\hat{2}}) = -\frac{1}{2}\{-\psi^1(\psi^1)^* - \psi^{\hat{1}}(\psi^{\hat{1}})^* + \psi^2(\psi^2)^* + \psi^{\hat{2}}(\psi^{\hat{2}})^*\}.
\end{aligned}$$

Punînd $A^k = -2x^k$ și trecînd la coordonatele covariante ale spinorului (9) din § 1, avem

$$(16)\quad \begin{aligned}
A^0 &= \psi_1\psi_1^* + \psi_2\psi_2^* + \psi_{\hat{1}}\psi_{\hat{1}}^* + \psi_{\hat{2}}\psi_{\hat{2}}^*,\\
A^1 &= \psi_2\psi_1^* + \psi_1\psi_2^* + \psi_{\hat{2}}\psi_{\hat{1}}^* + \psi_{\hat{1}}\psi_{\hat{2}}^*,\\
A^2 &= -\mathrm{i}\psi_2\psi_1^* + \mathrm{i}\psi_1\psi_2^* + \mathrm{i}\psi_{\hat{2}}\psi_{\hat{1}}^* - \mathrm{i}\psi_1\psi_{\hat{2}}^*,\\
A^3 &= \psi_1\psi_1^* - \psi_2\psi_2^* + \psi_{\hat{1}}\psi_{\hat{1}}^* - \psi_{\hat{2}}\psi_{\hat{2}}^*.
\end{aligned}$$

Acest vector este vectorul densitate al curentului.

4. Indicații bibliografice. Ultimul capitol este reprodus după

R a ș e v s k i, P. K. *Rimanova gheometriia i tenzornii analiz.* Moscova, 1953.

Teoria matematică a spinorilor a fost inițiată de E. C a r t a n. Pentru dezvoltări să se consulte:

C a r t a n, E. *Leçons sur la théoriee des spineurs.* Paris, 1938.

CUPRINS
